Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
городского округа "Город Архангельск"
"Средняя школа № 45"

Программа внеурочной деятельности
«Дополнительные главы математики»

разработана учителем математики первой категории
Коневой В. А.

Архангельск
2024

Аннотация программы

Данная программа курса своим содержанием может привлечь внимание учащихся 10 классов. В одиннадцатом классе учащиеся начинают чувствовать тревожность перед экзаменами, пытаются как-то готовиться к ним, но самостоятельно повторять и систематизировать весь материал, пройденный за последние годы обучения, не каждому десятикласснику под силу. На занятиях этого курса есть возможность устранить пробелы ученика по тем или иным темам. Ученик более осознанно подходит к материалу, который изучался в предыдущих классах, т.к. у него уже более большой опыт и богаче багаж знаний. Учитель помогает выявить слабые места ученика, оказывает помощь при систематизации материала, готовит правильно оформлять экзаменационную работу. Стоит отметить, что навыки решения математических задач совершенно необходимы всякому ученику, желающему хорошо подготовиться и успешно сдать экзамены по алгебре. Актуальность. Письменный экзамен по математике за курс основной школы является обязательным для выпускников 11-х классов. С учетом целей обучения в основной школе контрольно-измерительные материалы ЕГЭ проверяют сформированность комплекса знаний, умений, навыков, по предмету, с анализом и применением эмпирических знаний. В успешной сдаче ЕГЭ заинтересованы не только выпускники, их родители, школа, но и общество. Так как насколько будут компетентны в математике выпускники сегодня, такое и будет развитие общества завтра. Тема факультативного курса «Дополнительные главы математики» актуальна, так как способствует не только ликвидации пробелов знаний по математике, но и структурированному повторению всех разделов и, соответственно, успешному прохождению ЕГЭ. Структура экзаменационной работы и организация проведения экзамена предполагают, что подготовка к экзамену должна быть другой: учащийся должен не только знать и уметь, но и быть готовым психологически.

Пояснительная записка.

В школе для занятий по математике предлагаются небольшие фрагменты различных тем, рассчитанные на один или несколько уроков. Овладение же практически любой современной профессией требует тех или иных знаний именно по математике. Кроме того, чтобы подготовится к итоговой аттестации необходимо уделить достаточно много времени решению заданий.

Дополнительные занятия позволяют учащимся углублять знания, приобретать умения решать разнообразные задачи. Каждое занятие, а также все они в целом направлены на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, познакомить их с новыми идеями и методами, расширить представление об изучаемом в основном курсе.

Этот курс предлагает учащимся знакомство с математикой как с общекультурной ценностью, выработкой понимания ими того, что математика является инструментом познания окружающего мира и самого себя.

Если в изучении предметов естественнонаучного цикла очень важное место занимает эксперимент, и именно в процессе эксперимента и обсуждения его организации и результатов формируются и развиваются интересы ученика к данному предмету, то в математике эквивалентом эксперимента является решение задач. Таким образом, данный курс предназначен для расширения базового курса алгебры. Он пробуждает исследовательский интерес к вопросам, развивает логическое мышление, а также помогает учащимся подготовиться к итоговой аттестации.

Цели курса:

- На основе коррекции базовых математических знаний учащихся за курс 5 – 10 классов совершенствовать математическую культуру и творческие способности учащихся. Расширение и углубление знаний, полученных при изучении курса математики, развитие умений применять эти знания на практике.

- Закрепление теоретических знаний; развитие практических навыков и умений. Умение применять полученные навыки при решении нестандартных задач в других дисциплинах, развитие умений применять эти знания на практике.
- Создание условий для формирования и развития у обучающихся навыков анализа и систематизации полученных ранее знаний; подготовка к итоговой аттестации в форме ЕГЭ

Задачи:

- Реализация индивидуализации обучения; удовлетворение образовательных потребностей школьников по математике.
- Выявление и развитие их математических способностей.
- Обеспечение усвоения обучающимися наиболее общих приемов и способов решения задач.
- Развитие умений самостоятельно анализировать и решать задачи по образцу и в незнакомой ситуации;
- Исследовать разнообразие заданий, встречающихся на экзамене базового уровня.
- Сформировать у учащихся умение решать логические задачи, сводящихся к исследованию признаков делимости;

При проведении занятий необходимо учитывать индивидуальные особенности учащихся. Ведущее место следует отвести методам поискового и исследовательского характера, стимулирующим познавательную активность школьников. Значительной должна быть доля самостоятельной работы учащихся. При этом главная функция учителя – лидерство, основанное на совместной деятельности, направленное на достижение общей образовательной цели. Необходимо предусмотреть изучение нового материала как в коллективных, так и в индивидуально-групповых формах.

Программа курса предусматривает широкие возможности для дифференцированного обучения школьников путем использования задач разного уровня сложности.

В зависимости от ведущей дидактической цели и содержания материала занятия предлагается проводить в форме лекции, семинара, консультации, практикума, зачета. Наиболее предпочтительны методы объяснительно-иллюстративный, проблемно- поисковый и исследовательский, стимулирующие познавательную активность самостоятельную работу учащихся.

Программа рассчитана на учащихся 10 класса, общее количество часов 34, из расчета 1 час в неделю. Количество обучающихся в группе 27 человек.

Принципиальным положением организации дополнительного математического образования становится индивидуальное развитие обучающихся с учетом их способностей и возможностей. С этой целью содержание программы включает:

- теоретический материал, обязательный для усвоения;

- дополнительный теоретический материал, позволяющий обеспечить развивающее обучение;

- система текстовых, творческих задач и исследовательских заданий для индивидуальной работы, творческие проекты.

- исторические материалы, связанные с изучением общекультурного наследия;

- материал для аттестации обучающихся;

Темы программы независимы друг от друга и могут изучаться в любом разумном порядке; объем материала в каждой из них допускает уменьшение или увеличение. Изучаются стартовые возможности и динамика развития ребенка в образовательном процессе. Предусматривается обязательное проведение занятий по технике безопасности на рабочем месте.

Основные формы организации учебных занятий: лекции, семинары, исследовательские работы.

Формы итогового контроля: зачетная работа

Ожидаемые результаты:

Изучение данного курса дает учащимся возможность:

- повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;

- освоить основные приемы решения задач;

- овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;

- овладеть и пользоваться на практике техникой сдачи теста;

- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;

- повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;

- познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов, в ходе подготовки к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Выработают умения:

- самоконтроль времени выполнения заданий;
- оценка объективной и субъективной трудности заданий и, соответственно, разумный выбор этих заданий;
- прикидка границ результатов;

- прием «спирального движения» (по тесту)

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Вводное занятие.

Структура и содержание кимов ЕГЭ по математике.

Использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни.

Анализ реальных числовых данных. Осуществление практических расчетов по формулам. Использование оценки и прикидки при практических расчетах. Исследование с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков. Извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках. Решение прикладных задач.

Задачи на проценты.

Задачи, решаемые арифметическим способом. Задачи, в которых известно, сколько процентов одно число составляет от другого. Задачи, в которых известно, на сколько процентов одно число больше (или меньше) другого. Процентные вычисления в жизненных ситуациях (распродажа, тарифы, штрафы, банковские операции, голосования).

Задание на построение и исследование простейших математических моделей

Моделирование реальных ситуаций с использованием статистических и вероятностных методов. Решение простейших комбинаторных задач методом перебора. Решение простейших комбинаторных задач по классической формуле. Вычисление в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов.

Решение уравнений

Рациональные уравнения. Иррациональные уравнения. Уравнения с модулем. Тригонометрические уравнения.

Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин

Моделирование реальных ситуаций на языке геометрии. Исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем. Практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин: углов, длин, площадей треугольников, четырехугольников. Окружность вписанная в многоугольник и описанная около него.

Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин

Стереометрическая задача на нахождение длин куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы. Стереометрическая задача на нахождение углов куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы. Стереометрическая задача на нахождение площадей. Стереометрическая задача на нахождение объемов куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы.

Исследование функций

Задание на выполнение действий с функциями. Исследование функций с помощью производной. Нахождение экстремума функции, нулей функции, промежутков монотонности.

Задание на выполнение вычислений и преобразований

Числовые выражения. Степень. Преобразование рациональных и иррациональных выражений. Преобразование показательных и логарифмических выражений. Преобразование тригонометрических выражений.

Числа и их свойства

Теория числа. Признаки делимости. Цифровая запись числа.

Выбор оптимального варианта

Подбор комплекта или комбинации выбора варианта из двух возможных, трех возможных или четырех возможных вариантов.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Учебно-тематический план курса

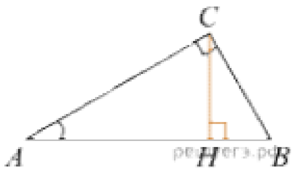
№	Тема занятия	Кол-во часов	Дата проведения план	Дата проведения факт
1	**Вводное занятие.** Структура и содержание КИМ ЕГЭ по математике	**1**		
	Использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни.	**12**		
2	Анализ реальных числовых данных	**2**		
3	Осуществление практических расчетов по формулам	**2**		
4	Использование оценки и прикидки при практических расчетах.	**2**		
5	Исследование с помощью функций различных реальных зависимостей между величинами и интерпретация их графиков	**2**		
6	Извлечение информации, представленной в таблицах, на диаграммах, графиках.	**2**		
7	Решение прикладных задач	**2**		
	Задачи на проценты.	**8**		
8	Задачи, решаемые арифметическим способом;	**2**		
9	Задачи, в которых известно, сколько процентов одно число составляет от другого;	**2**		
10	Задачи, в которых известно, на сколько процентов одно число больше (или меньше) другого;	**2**		
11	Процентные вычисления в жизненных ситуациях	**2**		

	(распродажа, тарифы, штрафы, банковские операции, голосования).			
	Задание на построение и исследование простейших математических моделей	**4**		
12	Моделирование реальных ситуаций с использованием статистических и вероятностных методов	**1**		
13	Решение простейших комбинаторных задач методом перебора	**1**		
14	Решение простейших комбинаторных задач по классической формуле	**1**		
15	Вычисление в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов.	**1**		
	Решение уравнений	**8**		
16	Рациональные уравнения	**2**		
17	Иррациональные уравнения	**2**		
18	Уравнения с модулем	**2**		
19	Тригонометрические уравнения	**2**		
	Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин	**5**		
20	Моделирование реальных ситуаций на языке геометрии	**1**		
21	Исследование построенных моделей с использованием геометрических понятий и теорем	**2**		
22	Практическая задача, связанная с нахождением геометрических величин	**2**		
	Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин	**4**		
23	Стереометрическая задача на нахождение длин	**1**		

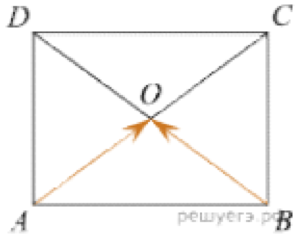
24	Стереометрическая задача на нахождение углов	**1**		
25	Стереометрическая задача на нахождение площадей	**1**		
26	Стереометрическая задача на нахождение объемов	**1**		
	Исследование функций	**4**		
27	Задание на выполнение действий с функциями	**2**		
28	Задание на выполнение действий с производными функций	**2**		
	Задание на выполнение вычислений и преобразований	**8**		
29	Числовые выражения	**1**		
48	Степень	**1**		
49-50	Преобразование рациональных и иррациональных выражений	**2**		
51-52	Преобразование показательных и логарифмических выражений	**2**		
53-54	Преобразование тригонометрических выражений	**2**		
	Числа и их свойства	**2**		
55	Признаки делимости	**1**		
56	Цифровая запись числа	**1**		
	Выбор оптимального варианта	**4**		
57	Подбор комплекта или комбинации	**1**		
58	Выбор варианта из двух возможных	**1**		
59	Выбор варианта из трех возможных	**1**		
60	Выбор варианта из четырех возможных	**1**		
	Исследование заданий Кимов ЕГЭ	**8**		
61-64	Работа над решениями кимов ЕГЭ - 2025	4		
62-	Защита решенных задач	4		

68				

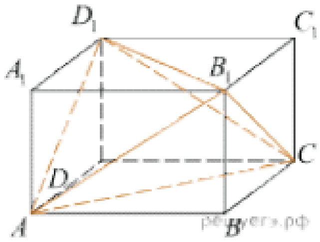
Вариант № 1

1. 

В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH − высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите AH.

2. 

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

3. 

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1.

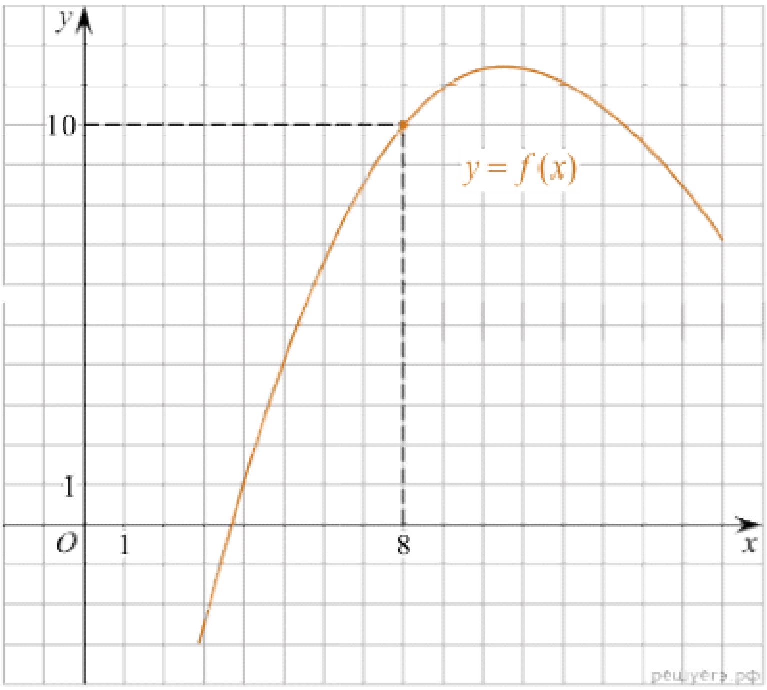
4. В соревновании по биатлону участвуют спортсмены из 25 стран, одна из которых — Россия. Всего на старт вышло 60 участников, из которых 6 — из России. Порядок старта определяется жребием, стартуют спортсмены друг за другом. Какова вероятность того, что десятым стартовал спортсмен из России?

5. В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

6. Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

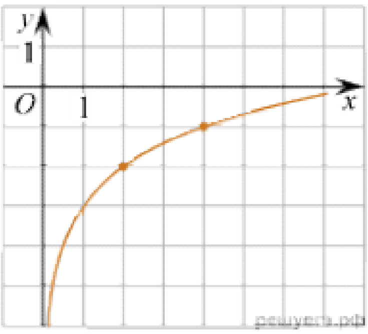
7. Найдите $p(x) + p(6-x)$, если $p(x) = \frac{x(6-x)}{x-3}$ при $x \neq 3$.

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



9. При температуре $0\ ^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

10. Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 15 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

11. 

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(32)$.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1;3]$.

13. а) Решите уравнение $\sin 8\pi x + 1 = \cos 4\pi x + \sqrt{2}\cos\left(4\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2-\sqrt{7};\ \sqrt{7}-2\right]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

15. Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \leqslant \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right).$$

16. Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

17. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N. $AB = 6$; $BC = 5$; $AC = 9$.

а) докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам

б) пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

18. Найдите все значения *a,* при которых уравнение

$$(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))^2-$$
$$-12a(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))+35a^2-6a-9=0$$

имеет ровно два решения.

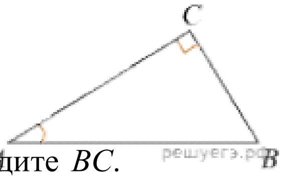
19. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

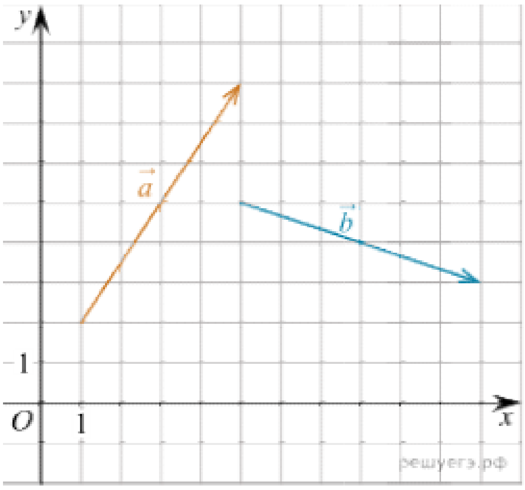
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Вариант № 2

1. 

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 2,$ $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}.$ Найдите BC.

2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}.$



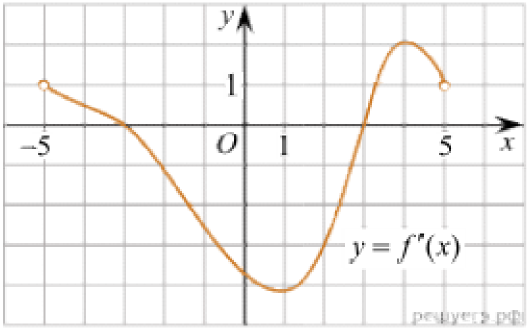
3. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $0,25\sqrt{11}$. Найти сторону основания пирамиды.

4. На олимпиаде по русскому языку 250 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

5. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

6. Найдите корень уравнения $(x-1)^3 = -8.$

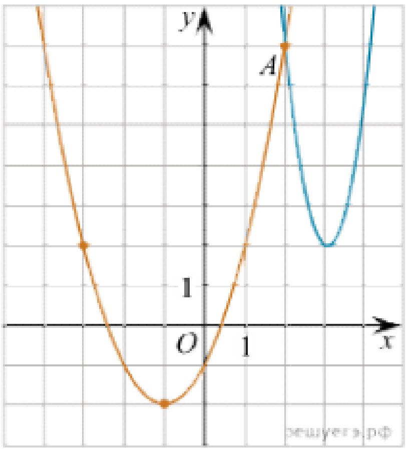
7. Найдите $2p(x-7) - p(2x)$, если $p(x) = x - 3.$

8. 

Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-5; 5]$. На рисунке изображён график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.

9. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

10. Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

11. 

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}.$

13. а) Решите уравнение $3 \cdot 9^{x - \frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $[2;\ 3]$.

14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

15. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geqslant 4\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

16. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

— к 15-му числу $(n + 1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

17. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2+y^2-a^2)\ln(9-x^2-y^2)=0, \\ ((x+5)^2+y^2-a^2)(x+y-a+5)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

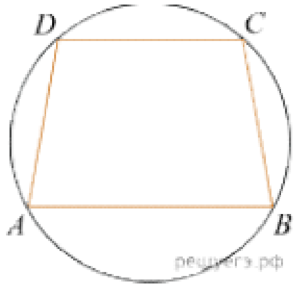
19. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{7}{19}$.

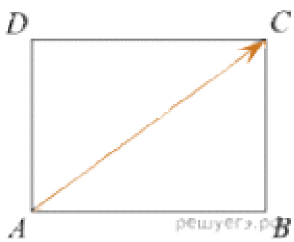
б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

Вариант № 3



1. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.



2. Две стороны прямоугольника *ABCD* равны 6 и 8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 22, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $\sqrt{14}$. Найти сторону основания пирамиды.

4. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

5. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

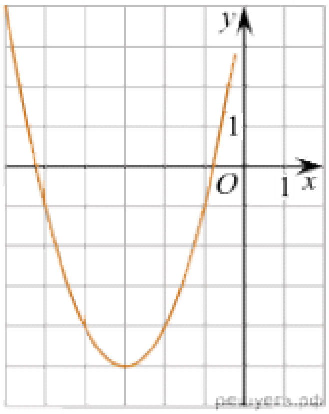
6. Решите уравнение $(x-6)^2 = -24x$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{50}\cos^2\frac{9\pi}{8} - \sqrt{50}\sin^2\frac{9\pi}{8}$.

8. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

9. Если достаточно быстро вращать ведерко с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{\upsilon^2}{L} - g\right)$, где m − масса воды в килограммах, υ скорость движения ведерка в м/с, L − длина веревки в метрах, g − ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

10. Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

11. 

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(1)$.

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 289}$.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

15. Решите неравенство $\frac{\log_9(2-x) - \log_{15}(2-x)}{\log_{15} x - \log_{25} x} \leqslant \log_{25} 9$.

16. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

17. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB.

б) Найдите площадь треугольника ACB.

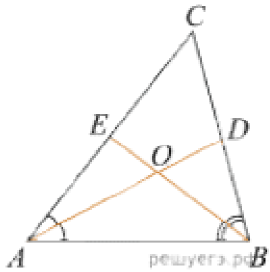
18. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$ имеет решения?

19. а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$ где числа a_i — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99,\ i = 0;1;2;3?$

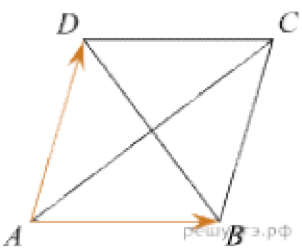
б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$ где числа a_i — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99,\ i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$ где числа a_i — целые, $0 \leqslant a_i \leqslant 99,\ i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

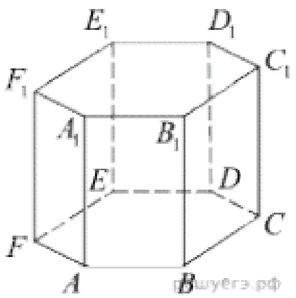
Вариант № 4



1. В треугольнике ABC угол C равен 58°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

2. 

Диагонали изображенного на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

3. 

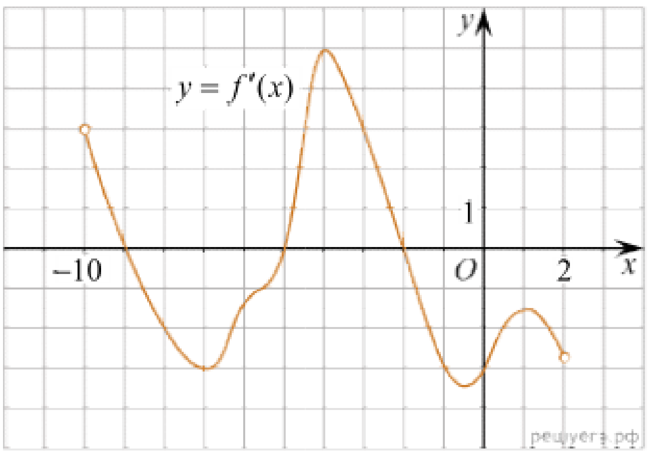
Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 3.

4. На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

5. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

6. Найдите корень уравнения $\dfrac{x+89}{x-7}=\dfrac{-5}{x-7}.$

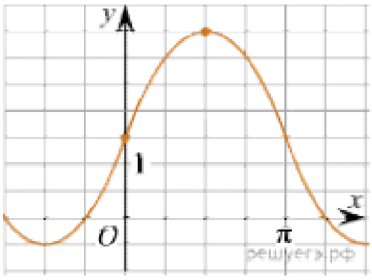
7. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}(5\pi-\gamma)-\operatorname{tg}(-\gamma)$, если $\operatorname{tg}\gamma=7.$

8. 

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y=-2x-11$ или совпадает с ней.

9. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров?

10. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

11. 

На рисунке изображён график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите b.

12. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

13. а) Решите уравнение: $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Точка *M* расположена на *SD* так, что *SM* : *SD* = 2 : 3. *P* — середина ребра *AD*, а *Q* середина ребра *BC*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *MQP* — равнобедренная трапеция.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость *MQP* разбивает пирамиду.

15. Решите неравенство $$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leqslant 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}.$$

16. 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на *r*% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*.

17. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 1 и 4.

18. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$|x-2| = a\log_2|x-2|$$

имеет ровно два решения.

19. Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

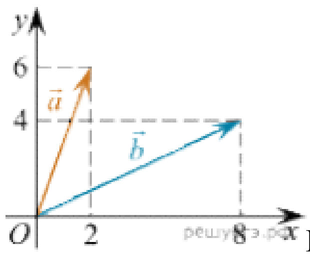
а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?

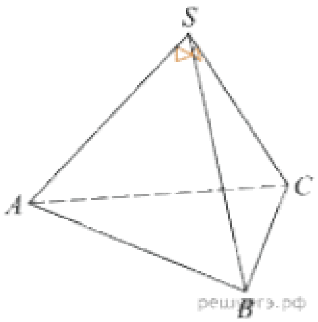
в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

Вариант № 5

1. В треугольнике ABC $AC = BC = 27$, AH — высота, $\sin BAC = \frac{2}{3}$. Найдите BH.

2. 

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

3. 

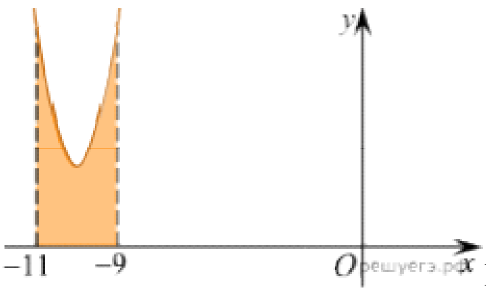
Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.

4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадает орёл, во второй — решка).

5. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

6. Найдите корень уравнения: $\frac{4}{7}x = 7\frac{3}{7}$.

7. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

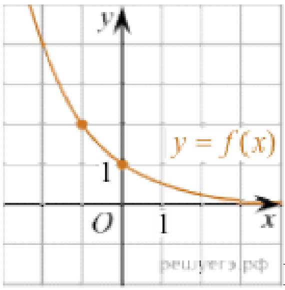
8. 

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

9. Два тела массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $\upsilon = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении определяется выражением $Q = m\upsilon^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 50 джоулей?

10. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно

600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

11. 

На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(4)$.

12. Найдите точку минимума функции $y = (x+16)e^{x-16}$.

13. а) Решите уравнение $\cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны. $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.

15. Решите неравенство: $\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \geqslant 0.$

16. Баба Валя, накопив часть своей пенсии, решила улучшить свое материальное положение. Она узнала, что в Спёрбанке от пенсионеров принимают вклады под определенный процент годовых и на этих условиях внесла свои сбережения в ближайшее отделение Спёрбанка. Но через некоторое время соседка ей рассказала, что недалеко от той местности, где проживают пенсионеры, есть коммерческий банк, в котором процент годовых для пенсионеров-вкладчиков в 20 раз выше, чем в Спёрбанке. Баба Валя не доверяла коммерческим банкам, но стремление улучшить свое материальное положение взяло верх. После долгих колебаний и ровно через год после открытия счета в Спёрбанке Баба Валя сняла половину образовавшейся суммы от ее вклада, заявив: «Такой навар меня не устраивает!» и открыла счет в том коммерческом банке, о котором говорила ее соседка, не теряя надежды на значительное улучшение своего материального благосостояния.

Надежды оправдались: через год сумма Бабы Вали в коммерческом банке превысила ее первоначальные кровные сбережения на 65%. Сожалела Баба Валя, что год назад в Спёрбанке сняла не всю сумму, а лишь половину, однако, подумала: «А где же мы не теряли?..» Гендиректор коммерческого банка оказался хорошим: не оставил Бабу Валю без денег.

А каков в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров?

17. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;

б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен 30°.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее значение.

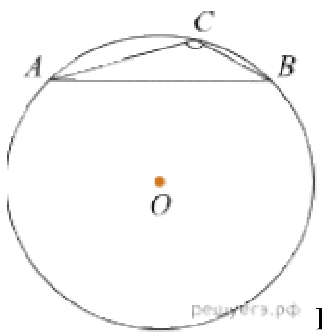
19. Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, 1/4,… выделить арифметическую прогрессию

а) длиной 4

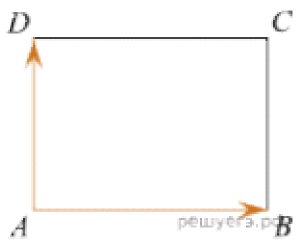
б) длиной 5

в) длиной k, где k — любое натуральное число?

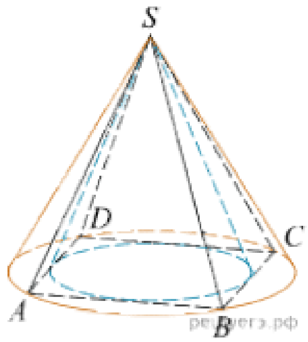
Вариант № 6

1. 

Найдите хорду, на которую опирается угол 120°, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.

2. 

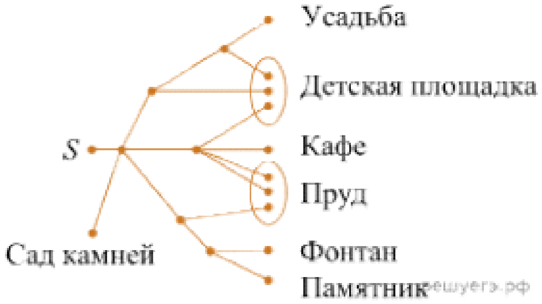
Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. 

Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

4. В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.

5. Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



6. Найдите корень уравнения $16^{x-9} = \frac{1}{2}.$

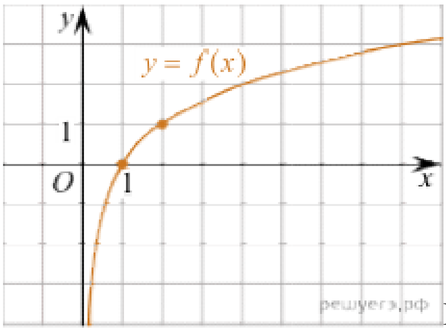
7. Найдите значение выражения $\frac{8}{\sin(-\frac{27\pi}{4})\cos(\frac{31\pi}{4})}.$

8. Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8.$ Найдите абсциссу точки касания.

9. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{\upsilon_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha),$ где $\upsilon_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?

10. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А.

и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

11. 

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6,5x^2 + 14x - 14$ на отрезке $[-4;3]$.

13. а) Решите уравнение

$$1 + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

15. Решите неравенство $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geqslant 3.$

16. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;

— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

17. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 75^\circ$.

18. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x + \frac{a^2}{x} + 1\right| + \left|x + \frac{a^2}{x} - 1\right| = 2$$

имеет хотя бы один корень.

19. В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

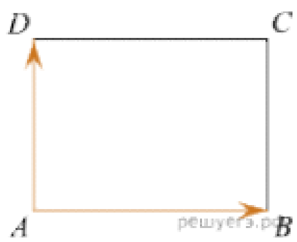
а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

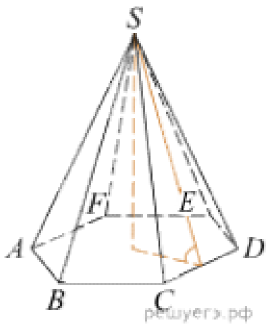
в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

<u>Вариант № 7</u>

1. Угол между двумя соседними сторонами правильного многоугольника, равен 160°. Найдите число вершин многоугольника.

2. 

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.



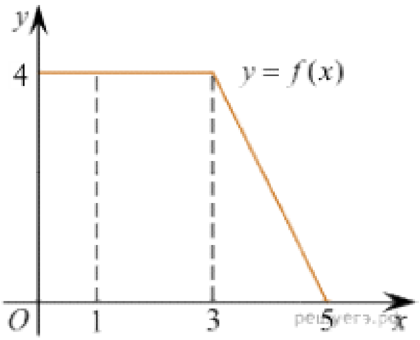
3. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.

4. Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

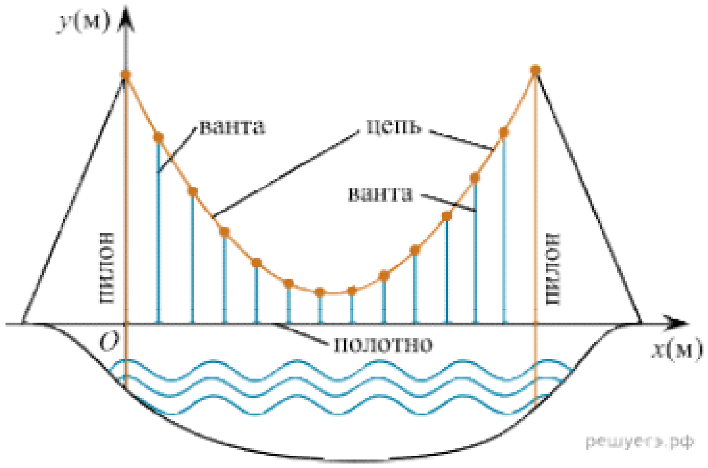
5. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{6}{4x-54}}=\dfrac{1}{7}.$

7. Найдите значение выражения $\sqrt{12}\cos^2\dfrac{5\pi}{12}-\sqrt{3}.$



8. На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_1^5 f(x)\,dx.$

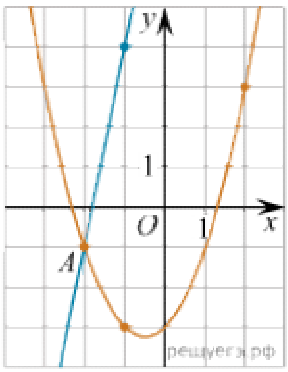
9. 

На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

10. Вова и Гоша решают задачи. За час Вова может решить на две задачи больше, чем Гоша (при этом оба за час решают целое количество задач). Известно, что вместе они решат 33 задачи на 1 час 15 минут быстрее, чем это сделал бы один Вова. За какое время Гоша может решить 20 задач? Ответ дайте в часах.

11. 

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

13. а) Решите уравнение $\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$.

14. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA'B'C'D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB'. Через точки K и C' проведена плоскость α, параллельная прямой BD'.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

15. Решите неравенство $\log_{x^2+x}\left(x^2-2x+1\right) \leqslant 1.$

16. 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг(в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

17. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны и диагональ: $AB = 3$, $BC = CD = 5$, $AD = 8$, $AC = 7$.

а) Докажите, что вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите BD.

18. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0.$$

имеет ровно 4 решения.

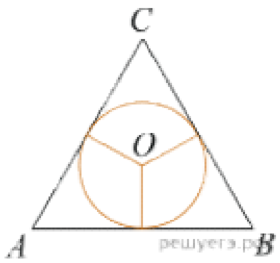
19. На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

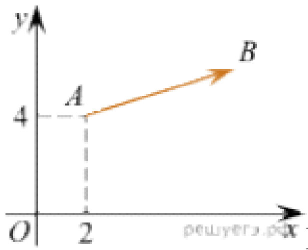
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Вариант № 8



1. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



2. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(2; 4)$ имеет координаты $(6; 2)$. Найдите абсциссу точки B.

3. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.

4. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Изумруд» играет два матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих матчах команда «Изумруд» начнёт игру с мячом не больше одного раза.

5. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

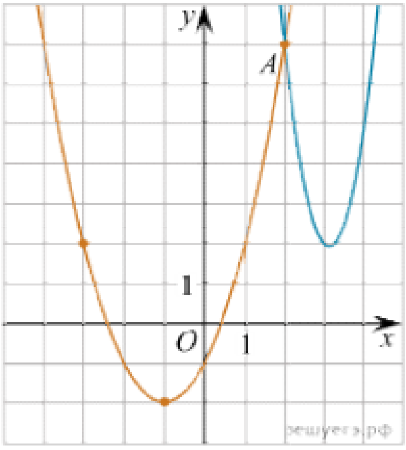
6. Найдите корень уравнения $7^{18,5x+0,7}=\frac{1}{343}.$

7. Найдите значение выражения $\log_{0,8}3\cdot\log_{3}1,25.$

8. Прямая $y=-4x-11$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

9. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия — монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q=100-10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p)=q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

10. В сосуд, содержащий 5 литров 12−процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

11. 

На рисунке изображены графики функций $f(x)=4x^2-25x+41$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=\log_3(x^2-6x+10)+2$.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}x+6=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC.

15. Решите неравенство

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \leqslant \frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2}.$$

16. Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2008 года в банке счёт, на который он ежегодно кладет 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2014 года он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно кладёт по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

17. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$.

а) Докажите, что четырехугольник $ABKC$ вписанный.

б) Найдите длину отрезка AO, если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны 3 и 12 соответственно, а $OK = 5$.

18. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$$

имеет хотя бы один корень.

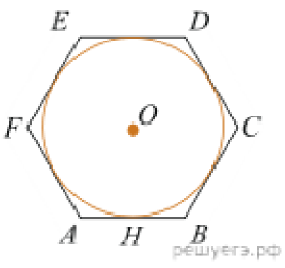
19. Каждый из 28 студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S.

а) Приведите пример, когда $S < 15$.

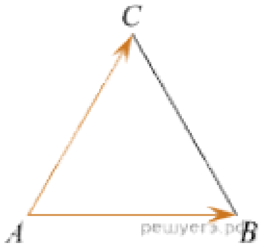
б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если $S = 13$?

в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если $S = 13$?

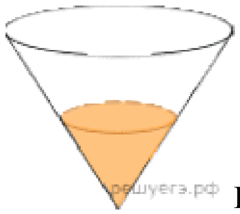
Вариант № 9

1. 

Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$.

2. 

Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

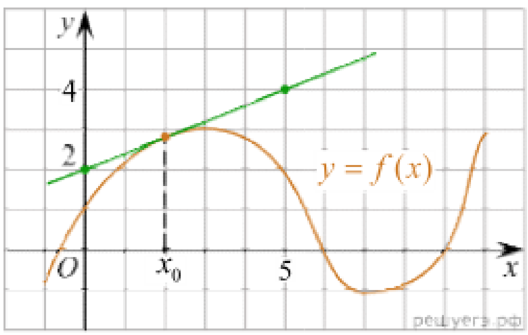
3. 
В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

4. Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона», распределились случайным образом по восьми игровым группам — по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

5. Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало 3 очка.

6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

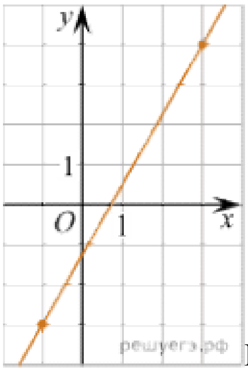
7. Найдите $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,4$.

8. 

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0 = 2$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^2 - f(x) + 1$ в точке x_0.

9. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\dfrac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м ^{2}, а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

10. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

11. 

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-5)$.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\operatorname{tg}x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4};\ 0\right]$.

13. а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

14. В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

15. Решите неравенство: $\dfrac{\lg(5y^2 - 2y + 1)}{\lg(4y^2 - 5y + 1)^3} \leqslant \dfrac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7}$.

16. Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость(за 1 тонну)	Отпускная цена(за 1 тонну)	Производственныевозможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

17. На отрезке *BD* взята точка *C*. Биссектриса *BL* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* является боковой стороной равнобедренного треугольника *BLD* с основанием *BD*.

а) Докажите, что треугольник *DCL* равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая *DL* делит сторону *AB*?

18. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

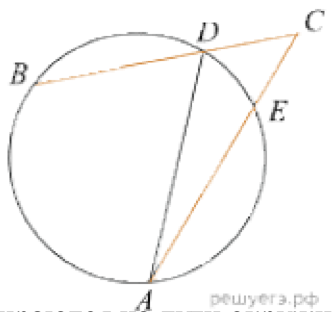
19. Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество {100; 101; 102; ...; 199} хорошим?

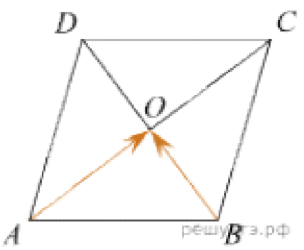
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ хорошим?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества {3; 4; 5; 6; 8; 10; 12}?

Вариант № 10

1. 

Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38°. Ответ дайте в градусах.

2. 

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

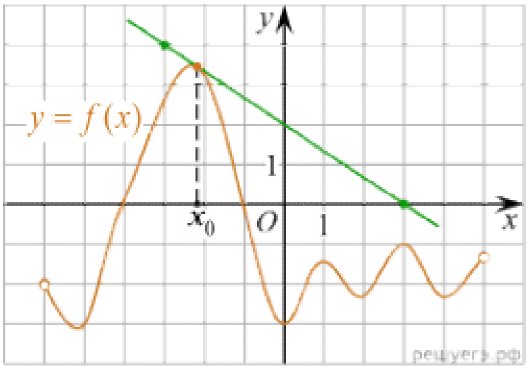
3. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4, AD = 3$, $AA_1 = 4$.

4. У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

5. Платежный терминал в течение рабочего дня может выйти из строя. Вероятность этого события 0,07. В торговом центре независимо друг от друга работают два таких платёжных терминала. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них в течение рабочего дня будет исправен.

6. Решите уравнение $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$.

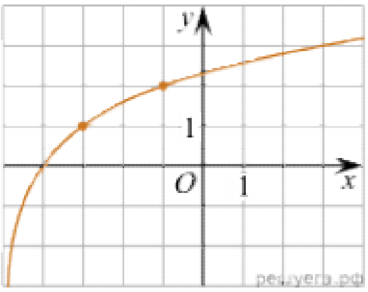
7. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

8. 

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Найдите значение производной функции $g(x) = 6f(x) - 3x$ в точке x_0.

9. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b = 1$ – постоянные параметры, x(м) – смещение камня по горизонтали, y(м) – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

10. Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от дома. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой — со скоростью 3 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

11. 

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(11)$.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.

13. а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

б) Найдите площадь сечения.

15. Решите неравенство $\log_2^2(3x-1)+\log_{3x-1}^2 2-$
$-\log_2(3x-1)^2-\log_{3x-1}4+2\leqslant 0.$

16. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

17. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причем $AD=2BC$, и точка M внутри трапеции, такая, что $\angle ABM=\angle DCM=90^\circ$.

а) Докажите, что $AM = DM$.

б) Найдите угол BAD, если угол CDA равен 50°, а высота, проведённая из точки M к AD, равна BC.

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение

$$\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t-\cos t}=2$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

19. а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

ЛИТЕРАТУРА

1) Единый государственный экзамен .Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся./ФИПИ-М.. «Интеллект-Центр»2013
2) Учебно-тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ 2018.
3) Математика: еженедельное приложение к газете «Первое сентября».
4) Математика в школе: ежемесячный научно- методический журнал.

Интернет ресурсы:

1.https://mathb-ege.sdamgia.ru/

2. http://alexlarin.net/

3.https://egemaximum.ru/

4.http://www.fipi.ru/

5.http://ege.edu.ru