Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
городского округа "Город Архангельск"
"Средняя школа № 45"

Рабочая программа курса
внеурочной деятельности
«Решение геометрических задач»
для 10-11 классов

разработанаучителем математики высшей категории
Альтшуллер С.В.

Архангельск, 2024г

О г л а в л е н и е

1.Пояснительная записка

Какие задачи из элементарной математики считаются самыми трудными? Большинство учителей математики, наверное, ответит: геометрические. Почему? Очевидно, потому, что в алгебре, тригонометрии, началах анализа, в отличие от геометрии, уже была разработана целая серия алгоритмов решения типовых задач. Самое трудное в решении любой задачи – анализ математического текста задачи и составление плана решения. При решении большинства задач алгебры ученик, как правило, вооружен *определенными алгоритмами, а потому возникающие трудности* носят чаще всего технический характер. При решении же геометрических задач чаще всего наличие алгоритмов не предусматривается, а выбрать набор аксиом, теорем и т.п., необходимых для решения конкретной задачи оказывается не просто. Поэтому при написании данного курса хотелось бы дать один очень важный совет, который носит скорее философский, чем дидактический характер: **хочешь научиться решать задачи – решай их!**

Как известно, систематический курс геометрии начинается в 7 классе. К 10 классу у школьников складываются определенные геометрические представления: они владеют некоторым теоретическим аппаратом и умеют решать отдельные простейшие задачи. Однако анализ результатов итоговой аттестации учащихся по геометрии и вступительных экзаменов по математике показывает, что трудности, испытываемые выпускниками и абитуриентами при решении геометрических задач, велики. В чем же причина? Очевидно в том, что к 10 классу у учащихся остается не сформированным такое общеучебное умение, как умение осуществлять системный подход к решению задач. Другими словами, учащиеся не владеют общими и частными методами решения задач. Отдельные темы, предусмотренные программой, не позволяют посмотреть на курс геометрии в целом; в лучшем случае, у учителя есть несколько часов для того, чтобы обобщить и систематизировать темы, пройденные за тот или иной период обучения.

Программа предлагаемого курса предоставляет возможность каждому ученику познакомиться с различными математическими идеями, увидеть разнообразие способов решения геометрических задач.

Мозаичность элективного курса является одним из основных принципов его построения.

Основные цели элективного курса:

- повышение интереса ученика к изучению предмета геометрия;
- развитие математических способностей школьников;
- обеспечение подготовки к успешной сдаче выпускных экзаменов, поступлению в вуз и продолжению образования, а также к профессиональной деятельности, требующей высокой математической культуры.

Частные цели курса:

- формирование логического мышления и пространственных представлений учащихся через обучение их решению геометрических задач;
- развитие умения у школьников анализировать математический текст.

Перечисленные выше цели достигаются через реализацию следующего дидактического принципа:

обучение решению задач = обучение умению разбить данную задачу на типовые подзадачи + обучение алгоритму решения типовых задач.

Преподавание элективного курса может быть выстроено в соответствии с принципами технологии обучения математике на основе решения задач (Р.Г.Хазанкин «Технология обучения математике на основе решения задач»[17]), либо через использование отдельных ее элементов, а именно:

- В е д у щ и м и м е т о д а м и п р е п о д а в а н и я к у р с а должны стать частично-поисковый, проблемный, исследовательский. Они призваны обеспечить реализацию следующих методологических подходов в обучении: задачного, деятельностного и личностно-ориентированного.
- Ц и к л у ч е б н ы х з а н я т и й п р и и з у ч е н и и э л е к т и в н о г о к у р с а содержит следующие типы уроков:

    урок-лекция → уроки решения «ключевых задач» → уроки-консультации → уроки-практикумы → зачетные уроки.

Х а р а к т е р и с т и к а с о д е р ж а н и я к у р с а и е г о с т р у к т у р а

Программа элективного курса состоит из двух разделов:

- П л а н и м е т р и я . Изучение этого раздела предусмотрено во втором полугодии 9-го класса.
- С т е р е о м е т р и я . Этот раздел рассчитан на учащихся 10-11 классов. Параграфы «Задачи на построение сечения, вычисление его элементов и площадей», «Вычисление расстояний и углов в пространстве» изучаются в десятом классе, параграфы «Комбинации тел» и «Объемы и поверхности тел Избранные вопросы стереометрии» – в одиннадцатом.

Для удобства разделы разбиты не только на параграфы, но и на темы. В каждый из них содержит задачи нескольких уровней сложности: уровень А (или задачи для устных упражнений), уровень Б – это задачи базового уровня, уровень В – двух-трехходовые задачи, требующие применения комплекса знаний по указанной теме. Кроме того, в некоторых темах представлены задачи повышенной сложности. При их решении, учащиеся должны установить и реализовать комплекс внутрипредметных связей. Успешность решения этих задач обусловлена не только владением предметными, но и в значительной степени, высоким уровнем развития общеучебных умений и навыков.

Таким образом, система задач элективного курса предоставляет учителю возможность подбирать задачи, исходя из дидактических целей конкретного учебного занятия с одной стороны, так и в зависимости от уровня подготовки класса – с другой.

Особо отметим тот факт, что в содержание элективного курса включены такие темы как «Методы решения геометрических задач на доказательства», «Понятие опорного элемента и минимального базиса в решении геометрической задачи» и «Правила выполнения выносных чертежей». Изучение этих тем призвано развивать у учащихся умение проводить рассуждения как в письменной, так и в устной формах в тех случая, когда решение геометрической задачи требует доказательства или содержит его в качестве составной части; способствовать развитию умения устанавливать причинно-следственные связи между искомыми и заданными элементами задач через целенаправленный поиск закономерностей в элементах выносного чертежа. Кроме того, эти темы способствует развитию целостного представления о геометрии не только как об учебном предмете, но и как о науке.

Планирование учебного материала составлено таким образом, что оно сопровождает систематический курс геометрии 9-11 классов и не привязано к конкретному учебно-методическому комплексу.

И н с т р у м е н т а р и й к о н т р о л я образовательных достижений учащихся: контрольные и зачетные работы.

С о д е р ж а н и е м а т е р и а л а д л я о ц е н к и у р о в н я о б у ч е н н о с т и у ч а щ и х с я по темам элективного курса определяется учителем самостоятельно. Для составления контрольных работ и зачетов он может использовать как дидактические материалы к курсу, так и задачи из собственной методической копилки. Кроме того, он может обратиться и к задачам, опубликованным в литературе (см. список литературы).

Планируемые результаты обучения

Программа элективного курса способствует формированию у учащихся системного подхода в решении задач с геометрическим содержанием. Это позволяет им при успешном усвоении программы курса, решать задачи как части «В» Единого государственного экзамена, так и в значительной степени продвинутся в умении применять полученные знания при решении задач уровня «*С*».

2.Содержание и организация процесса обучения

Раздел I. Планиметрия

§ 1. Треугольники.

Треугольник. Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник, его признаки и свойства. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Теорема синусов и косинусов. Расширенная теорема синусов. Приемы нахождения медианы в треугольнике. Свойство биссектрисы треугольника.

Прямоугольный треугольник. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Свойство медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника. Формулы для вычисления площадей треугольников.

[Признаки подобия треугольников. Основные конфигурации, связанные с подобием треугольников: примеры отсечения от треугольника подобного исходному. Основная задача подобия]*.

Замечательные точки треугольника. Формулы для вычисления радиусов вписанных и описанных окружностей около треугольников (в том числе, уточненные для частных случаев). [Теоремы Чевы и Менелая].

§ 2. Четырехугольники.

Четырехугольник. Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника. Сумма внешних углов выпуклого четырехугольника.

Параллелограмм и трапеция как классы четырехугольников. Теорема Вариньона. Средние пропорциональные и средние геометрические в трапеции. Основные виды дополнительных построений в трапеции. Ромб, прямоугольник и квадрат как частные виды параллелограмма. Формулы для вычисления площадей основных классов четырехугольников: параллелограммов и трапеций.

Понятие четырехугольника, вписанного или описанного около окружности. Свойства этих конфигураций.

Понятие опорного элемента и минимального базиса в решении геометрической задачи.

§ 3. Окружность. Измерение углов, связанных с окружностью. Пропорциональные линии в круге. Комбинации окружностей.

Окружность и круг. Касательная к окружности, хорда. Дуга окружности, круговой сектор, сегмент, пояс.

Измерение углов, связанных с окружностью. Угол центральный и вписанный. Измерение центральных и вписанных углов. Величина угла, образованного касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности. Величина угла с вершиной внутри круга, вне круга.

---

* Здесь и далее в квадратных скобках указаны темы, желательные, но не обязательные для рассмотрения на учебных занятиях.

Свойства хорд, секущих икасательных. Свойство радиуса, проведенного в точку касания касательной и окружности. Свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Свойства дуг, заключенных между параллельными хордами. Свойства диаметра, перпендикулярного хорде. Связи длины отрезков касательной секущей, проведенных к окружности из одной и той же ее точки. Произведение отрезков пересекающихся хорд. Свойства линий в касающихся и пересекающихся окружностях. Свойство линии центров двух касающихся окружностей. Связь расстояния между центрами двух касающихся окружностей и их радиусов (при касании внешнем и внутреннем). Свойство общей касательной двух окружностей, их общей хорды. Необходимое и достаточное условие касания извне двух окружностей.

§ 4. Вычисление площадей. Метод площадей.

Площадь фигуры. Аксиомы площади. Использование свойства аддитивности площади при разбиении и достраивании многоугольника.

Дополнительные теоремы о площадях треугольников. О разбиении треугольника на равновеликие. Об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, по равной высоте. Об отношении площадей треугольников с общим основанием и вершинами, лежащими на параллельной ему прямой.

Дополнительные теоремы о площадях четырехугольников. О площади произвольного выпуклого четырехугольника. О площади четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями. О площади равнобедренной трапеции по высоте, проведенной из вершины тупого угла.

Теорема Пифагора и формула Герона как ключевой момент в решении задач на нахождение площади фигур. Об отношении площадей подобные фигур. Соотношения между элементами фигур при вычислении площадей вписанных и описанных многоугольников.

§ 5. Подобие треугольников в задачах на комбинации окружности и треугольника.

Признаки подобия треугольников. Основные конфигурации, связанные с подобием треугольников: примеры отсечения от треугольника подобного исходному. Основная задача подобия. Использование подобия для установления взаимосвязи элементов в комбинации треугольников с окружностью.

§ 6. Применение тригонометрии в решении планиметрических задач.

Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Теоремы синусов, косинусов и тангенсов в треугольнике. Формулы для вычисления площадей фигур с использованием тригонометрических функций.

Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения. Формулы сложения. Формулы двойного аргумента. [Формулы выражения через тангенс половинного аргумента]. Формулы решений основных тригонометрических уравнений.

Раздел II. Стереометрия

§1. Задачи на построение сечения. Вычисление элементов сечения и его площади.

[Методы доказательства в решении стереометрических задач. Задачи на построение. Анализ и доказательства в решении стереометрических задач на построение].

Аксиомы стереометрии и следствия этих аксиом в решении стереометрических задач на построение. Некоторые правила построения сечения. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Построение сечения, проходящего через заданную прямую и не лежащую на ней точку. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади.

Р*ешение задач на построение сечений многогранников с условиями параллельности.* Построение сечения, проходящего через заданную прямую параллельно другой заданной прямой. Построение сечения, проходящего через заданную точку, параллельно заданной плоскости. Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух скрещивающихся прямых. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади.

[Решение задач на построение сечений многогранников с условиями перпендикулярности. Приемы вычисления элементов сечения, его периметра и площади].

§ 2. Вычисление расстояний и углов в пространстве

Понятие расстояния в пространстве. Расстояние от точки до прямой [задача о вычислении площади треугольника], от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми. [Прием достраивания пирамиды до параллелепипеда при решении задач на вычисление углов и расстояний в пространстве]. Геометрическое место точек пространства, равноудаленных от вершин многоугольника, от сторон многоугольника.

Угол между скрещивающимися прямыми. Угол между прямой и плоскостью, между плоскостями. Двугранный угол.

Место доказательства в решении стереометрических задач на вычисление углов и расстояний в пространстве. Правила выполнения выносных чертежей при вычислении углов и расстояний в пространстве. Определение минимального базиса при решении задачи на вычисление расстояний и углов в пространстве.

§ 3. Комбинации тел.

Понятие комбинации тел. Цилиндры, вписанные и описанные около призм. Конусы, вписанные и описанные около пирамид. [Комбинации цилиндра и тетраэдра, конуса и призмы].

Сферы, вписанные и описанные около прямых призмы, правильных пирамид. [Сферы, вписанные и описанные около произвольных пирамид. Произвольные комбинации сферы с многогранниками. Комбинации серы и правильных многогранников].Каркасные многогранники. Комбинации круглых тел.

Выполнение выносных чертежей в решении задач, связанных с комбинациями тел.

§ 4.Объемы и поверхности тел. Избранные вопросы стереометрии.

Дополнительные теоремы об объеме тетраэдра. Объем тетраэдра с попарно перпендикулярными боковыми ребрами. Объем тетраэдра по площади двух его граней, их общего ребра и двугранного угла, образованного этими гранями. Об отношении объемов тетраэдров, имеющих по равному трехгранному углу. Прием достраивания тетраэдра до параллелепипеда при вычислении объемов.

Задачи на сравнение площадей поверхностей и объемов многогранников. [Теорема Менелая]

Геометрические задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения. Применение тригонометрии в решении стереометрических задач.

3 . Календарно поурочное планирование.

По 1 часу в неделю в 10-11 классах.

№	Тема	Количество часов	Литература

Планиметрия		21 час	
1	Треугольники	3 часа	[9], [12], [14]
2	Четырехугольники	2 часа	[10], [12], [14]
3	Окружность. Измерение углов, связанных с окружностью. Пропорциональные линии в круге. Комбинации окружностей	3 + 1 часа (резерв времени)	[11], [12], [14],[15]
4	Вычисление площадей. Метод площадей	2 часа + 1 час (резерв времени)	[14], [15], [16]
5	Подобие треугольников в задачах на комбинации окружности и треугольника	2 часа + 1 час (резерв времени)	[15]
6	Применение тригонометрии в решении планиметрических задач	2 часа	[13]
7	Практикум по решению задач повышенной сложности	4 часов	[12], [13], [14], [15], [16]
Стереометрия		43 часа	
Задачи на построение сечений. Вычисление их элементов и площади			
1	Некоторые правила построения сечения многогранников. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой	1 час	[1] , [5], [6]
2	Построение сечения, проходящего через заданную прямую и не лежащую на ней точку		[1], [5], [6]
3	Построение сечения, проходящего через одну из заданных прямых, параллельно другой прямой	1час	[1], [5], [6]
4	Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно заданной плоскости	1час	[1], [5], [6]
5	Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух заданных прямых	1час	[1], [5], [6]
6	Построение сечения, содержащего условия перпендикулярности	1час	[1], [5], [6]
7	Поэтапно-вычислительный метод решения задач на вычисление элементов сечения и его площади	3 часа + 1 часа (резерв времени)	[1], [4], [5], [6]
Вычисление расстояний и углов в пространстве			
8	Поэтапно-вычислительный метод решения задач на вычисление расстояния от точки до прямой; от точки до плоскости; между скрещивающимися прямыми	2 часа	[1], [3], [5], [6]
9	Поэтапно-вычислительный метод решения задач на вычисление угла между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями	2 часа	[1], [3], [5], [6]
Комбинации тел			
10	Цилиндр и многогранники	2 часа	[4], [5], [6]
11	Конус и многогранники	2часа	[4], [5], [6]
12	Сфера и многогранники	5 часов	[4], [5], [6]

13	Конус, цилиндр и сфера	2 часа	[4], [5], [6]
14	Практикум по выполнению выносных чертежей и применению их в решении стереометрических задач на комбинации тел	3 часа	
15	Каркасные многогранники	2 часа	[2], [3], [7],[8
Объемы и поверхности тел. Избранные вопросы стереометрии			
16	Вычисление объема тетраэдра	2 часа	[4], [5], [6]
17	Задачи на вычисление наибольшего и наименьшего значений	4 часа	[2], [5], [6]
18	Задачи на сравнение объемов геометрических тел	3 часа	[4], [5], [6]
19	Практикум по решению задач части С Единого Государственного Экзамена (отработка оформления геометрических задач)	3 часа	[19]
Резерв времени		4 часа	

Всего 68 часа

4.Дидактические материалы

Раздел I. Планиметрия

§1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Дидактические цели и задачи: обобщить и систематизировать знания о треугольнике, его частных видах, их свойствах. Формировать навык в применении теорем, связывающих элементы в треугольнике. Основная цель темы – формирование умений «видеть» прием или метод решения, научит школьника формулировать идею решения и составлять ход рассуждений.

Задачи для устных упражнений*

1. Могут ли стороны треугольника относиться как 2:3:6?

Ответ. Нет.

2. В треугольнике ABC: AB = BC, $\angle A = 70°$.

Найдите внешний угол треугольника (рассмотрите все случаи).

3. В треугольнике ABC: медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке М, причем, АМ =4 см, MA_1 = 2 см, B_1M = 1 см.

Вычислите МВ.

4. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны ВС в точке К. Вычислите СК, если АС +СВ = 16, АВ = 4. Указания. Расстояние от вершины треугольника до точки касания с вписанной окружностью можно выразить через стороны треугольника.

Ответ. 6.

5. В треугольнике ABC AC = 4, AB = 6. Прямая, проходящая через вершину треугольника А и центр вписанной окружности пересекает сторону ВС в точке L, причем, LB = 3. Вычислите отрезок CL. Указания. Теорема о биссектрисе угла треугольника; точка пересечения биссектрис является центром вписанного круга.

Ответ. 2.

6. В треугольнике ABC : $\angle B = 30°$, AL – биссектриса угла A, $L \in BC$ и $LK \perp AC$, $K \in AC$.

Вычислите длину отрезка LK, если BL = 10. Указания. Свойство биссектрисы угла треугольника.

Ответ. 5.

7. В треугольнике ABC: AB =10, $\angle C = 30°$. KF и KL – серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC.

Вычислите AK. Указания. Центр описанного около треугольника круга; теорема синусов.

Ответ. 10.

8. В треугольнике AB: AC = 2, BC = 3, $\angle C = 60°$.

Вычислите AB. Указание. Теорема косинусов.

Ответ. $\sqrt{7}$.

9. В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $h_c = 3$, $m_c = 5$.

Вычислите площадь треугольника ABC. Указания. Свойство прямоугольного треугольника: $R = c/2 = m_c$.

Ответ. 15.

---

* В решениях задач можно использовать готовый чертеж

10. В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на части, равные 4 см и 9 см.

Вычислите значение высоты. Указания. Высота, проведенная из вершины прямого угла, делит треугольник на два подобных.

Ответ. 6.

11. В треугольнике ADC точка B делит сторону AC на два отрезка: 3 см и 1 см.

Вычислите площадь треугольника DBC, если площадь треугольника ADB = 15 см. Указания. Формула площади треугольника, отношение площадей треугольников, имеющих по равной высоте.

Ответ. 5.

12. Верно ли, что в любом треугольнике $4rRp = abc$? Указания. Формулы площади треугольника.

Ответ. Да.

Уровень Б

1. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны равна 5 см.

Найдите длину боковой стороны. Указания. Метод «удвоения медианы».

Ответ. 6 см.

2. Найти периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна c, а радиус вписанной окружности равен r. Указания. Свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

Ответ. $2c + 2r$.

3. В треугольнике даны длины двух сторон b и c и угол α между ними.

Найдите длину биссектрисы, проведенной к третьей стороне. Указания. Метод площадей.

Ответ. $2bc\cos(\alpha/2)/\ b+c$.

4. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основание 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию.

Найдите длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника. Указания. Подобие треугольников.

Ответ. 3 см.

5. В треугольнике ABC AB = 13, BC = 7, BM = 4, где M – середина стороны AC.

Найдите площадь треугольника ABC. Указания. Теорема об отношении площадей треугольников, имеющих равные высоты.

Ответ. $14\sqrt{3}$.

6. Точки касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n.

Найдите площадь треугольника.

Ответ. *nm*.

Уровень B

1. Определите вид треугольника, если его медианы 3, 4, 5.

Указание. Подобие треугольников, отношение отрезков медиан.

Ответ. остроугольный.

2. В треугольнике ABC AB = CH, где H – ортоцентр треугольника ABC.

Найдите угол C. Указания. Подобие треугольников.

Ответ. 45°.

3. В треугольнике ABC BC = a, $\angle A = \alpha$, I- центр вписанного круга.

Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BCI.

Указания. Теорема синусов, формулы тригонометрии.

Ответ. $a/2\cos(\alpha/2)$.

4. В прямоугольном треугольнике расстояние от центра вписанного круга до вершин острых углов равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$.

Найдите стороны треугольника. Указания. Теорема косинусов, свойство центральных и вписанных углов, радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности.

Ответ. 3, 4, 5.

5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Биссектриса угла A делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 см и 5 см.

Найдите площадь треугольника. Указания. Свойство биссектрисы угла треугольника.

Ответ. 54 см^2.

Дополнительные задачи

Прямоугольный треугольник

1. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит прямой угол в отношении 1:2 и равна m.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. m, $m\sqrt{3}$, $2m$.

2. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см.

Найдите катеты.

Ответ. 56 и 42 см.

3. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 18 см и 24 см.

Ответ. $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см.

4. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 15, 20, 25 см.

Равнобедренный треугольник

5. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна 5 см.

Найдите боковую сторону.

Ответ. 6 см.

6. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см, а медиана, проведенная к его боковой стороне, равна 3 см.

Найдите основание треугольника.

Ответ. $\sqrt{10}$ см.

Произвольный треугольник

7. (ЕГЭ, 2004 г.*)Две стороны треугольника равны *a* и *b*, а медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны.

Найдите третью сторону треугольника.

Ответ. $((a^2+b^2)/5)^{0,5}$

---

*Задача представлена в общем виде

§2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Дидактические цели и задачи. Обобщить и систематизировать знания о четырехугольниках, их видах (параллелограммах и трапециях) и свойствах. Формировать навык в применении теорем, связывающих элементы в четырехугольнике.

Основная цель темы – формирование навыка использования алгебраического метода решения геометрических задач, умения выделять опорный элемент и устанавливать взаимосвязь с другими элементами заданной конфигурации, формирование устойчивого навыка использования поэтапно-вычислительного метода. Реализация внутри предметных связей: треугольник-четырехугольник.

Задачи устных упражнений.

1. В произвольном четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются под углом 30° и равны соответственно 2 и 1.

Вычислите площадь этого четырехугольника. Указания. Вычисление площади произвольного четырехугольника через его диагонали и угол между ними.

Ответ. 0, 5.

2. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей? Указания. Диагонали трапеции разбивают ее на треугольники, два из которых, прилежащие к основания, подобны.

Ответ. Нет.

3. В четырехугольнике ABCD $AB \parallel CD$, AB = 2, CD = 3, AD = BC, DB – биссектриса.

Найдите периметр этого четырехугольника. Указания. Признак трапеции и свойство ее углов.

Ответ. 9.

4. Окружность касается оснований трапеции ABCD и ее боковой стороны AB, причем, ее она делит точкой касания K на два отрезка BK =1 и AK = 4.

Найдите диаметр окружности. Указания. Свойство биссектрис, проведенных из вершин боковой стороны трапеции.

Ответ. 4.

5. AECF, ABCD и AMCN – прямоугольники.

Почему равны MN, EF, BD? Указания. Свойство диагоналей прямоугольника.

6. ABCD – параллелограмм, AB = 3, AD = 8, BDD = 7.

Вычислите AC. Указания. Равенство, связывающее длины сторон и диагоналей параллелограмма.

Ответ. $\sqrt{24}$.

7. ABCD – ромб. K, L, M, P – середины его сторон.

Определите вид четырехугольника. Указания. Свойство диагоналей ромба. *Ответ*. Прямоугольник.

8. Окружность вписана в четырехугольник ABCD. AB = 2, BC = 3, CD = 4.

Вычислите AD. Указания. Свойство описанного четырехугольника.

Ответ. 3.

9. Трапеция ABCD вписана в круг. AB = 3, BC = 2, AD = 4.

Доказать, что существует вписанная в нее окружность. Указания. Свойство вписанного четырехугольника.

Уровень Б

1. В каком отношении делит площадь трапеции средняя линия, если основания трапеции равны a и b?

Ответ $(3a + b)/(a+3b)$.

2. Стороны параллелограмма равны 23 и 11, а диагонали относятся как 2:3.

Найдите диагонали.

Ответ. 20 и 30.

3. Основания трапеции равны 4 и 16 см.

Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей, если известно, что окружности существуют.

Ответ. 4 см и $5\sqrt{41}/4$ см.

4. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 2 и 4 см. Найдите площадь трапеции. Ответ. 14, 4 см^2.

Уровень В

1. В каком отношении прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и параллельная основаниям делит площадь трапеции с основаниями a и b?

Ответ. $a(a^2 + 3ab)/b(b^2 + 3ab)$.

2. Найдите площадь трапеции, если длины ее диагоналей 13 и 15 м, а высота трапеции 12 м.

Ответ. 84 м^2.

3. В трапеции ABCD ($CB \parallel AD$). AB = CD, $\angle$ BCA = $\angle$DCA, BC= 3, периметр трапеции равен 42.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. 96.

4. Доказать свойство вписанного в окружность четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны: площадь четырехугольника равна полусуммы произведений противоположных сторон.

5. Доказать, что если боковые стороны трапеции перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей такой трапеции равна сумме квадратов ее оснований.

6. В трапеции ABCD каждое из оснований AD и BC продолжено в обе стороны. Биссектрисы внешних углов A и B трапеции пересекаются в точке K, а внешних углов C и D в точке E. KE = $2a$. Найдите периметр трапеции. Ответ $4a$.

7. Найдите площадь ромба ABCD, если радиусы окружностей, описанных около Δ ABC и ΔABD равны R и r.

Ответ. $8r^3R^3/(r^2+R^2)^2$.

Дополнительные задачи

Параллелограмм и его виды

1. Стороны параллелограмма 8 и 3; биссектрисы двух смежных углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на три части.

Найдите каждую из них.

Ответ. 3, 2, 3.

2. Параллелограмм с периметром 44 разделен диагоналями на 4 треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6.

Найдите длины сторон параллелограмма.

Ответ. 14 и 8.

3. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на его диагональ, делит ее на отрезки 6 см и 15 см.

Найдите стороны и диагонали параллелограмма, если известно, что разность сторон равна 7 см.

Ответ. 17, 10, 21, $\sqrt{337}$ см.

4. Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом 60°.

Найдите меньшую сторону прямоугольника.

Ответ. 4.

5. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит ее в отношении 1:3.

Найдите длину диагонали, если известно, что точка ее пересечения с другой диагональю удалена от большей стороны на расстояние, равное 2.

*Ответ.*8.

6. Найдите стороны и углы четырехугольника с вершинами в серединах сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 10 .

*Ответ.*3, 5, 3, 5, 90 °, 90 °, 90 °, 90 °.

7. Острый угол A ромба ABCD равен 45 °, проекция стороны AB на строну AD равна 12.

Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD.

Ответ. 6.

8. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30 °, а сторона равна 4. Ответ.1.

Трапеция

9. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60 °.

Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

10. В равнобедренной трапеции высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 10.

11. Высот равнобедренной трапеции, опущенная из вершины меньшего основания , делит большее основание в отношении 1:3.

Найдите отношение оснований трапеции.

*Ответ.*1:2.

12. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

Найдите углы трапеции.

Ответ. 60 °, 60 °, 120 °, 120 °.

13. Один из углов трапеции равен 30 °, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом.

Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10, а одно из оснований равно 8.

Ответ.2.

14. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол, равный 60 ° с основанием трапеции.

Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ. 5.

15. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол, равный 30 °, с одним из оснований.

Найдите это основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис при другом основании.

Ответ. 9.

§ 3. ОКРУЖНОСТЬ. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОКРУЖНОСТЬЮ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ. КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТЕЙ

Дидактические цели задачи. Активизировать знания и умения учащихся решать задачи на применение соотношений между отрезками, углами в окружности. Установление внутри предметных связей. Развитие наблюдательности.

Задачи устных упражнений

1. Точки А, В, С делят окружность на три дуги, причем, ∪AB: ∪BC : ∪AC + 1 : 6 : 2.

Найдите углы треугольника ABC. Указание. Измерение вписанных углов.

Ответ. 20°, 120°, 40°.

2. Вершины квадрата ABCD и произвольная точка O лежат на окружности.

Доказать, что ∠BOA = ∠AOD = ∠DOC. Указание. Равные хорды стягивают равные дуги.

3. Точки C, D, К лежат на окружности. Через точку К проведена касательная AB.

Найдите ∠DKB, если ∠ K = 50°. Указание. Измерение угла между хордой и касательной.

Ответ. 50°.

4. Точки A, B, C, D лежат на окружности. AC – биссектриса угла А.

Найдите подобные треугольники, если AC пересекает BD в точке О. Указание. Свойство вписанных углов, опирающихся на одну дугу.

Ответ. ΔOBC, ΔABC.

5. Первая окружность вписана в угол AOC и касается его сторон в точках А и С. Вторая окружность вписана в угол BOD и касается его сторон в точках B и D(точка D лежит на луче OC).

Найдите CD, если OA = a, OB = b. Указание. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности.

Ответ. $a – b$.

6. Две различные хорды окружности, пересекаясь, образуют отрезки длиной 6 и 3, x и 2.

Вычислитеx. Указание. Свойство пересекающихся хорд.

Ответ. 9.

7. Из точки А к окружности проведены касательная AK и секущая AC, причем, AC = 16, AK = 8.

Найдите AB, B – точка пересечения AC с окружностью. Указания. Свойство пересекающихся хорд.

Ответ. 4.

8. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O, $OK \perp BC$, $KD \parallel AB$.
Доказать, что $OD \perp AC$. Указания. Свойство диаметра, перпендикулярного хорде.
9. Окружности радиусов 3 и 5 касаются.
Найдите расстояние между их центрами. Указание. Точка касания окружностей лежит на линии их центров; $O_1O_2 = R_2 \pm R_1$.
Ответ. 2 и 8.

Уровень Б

1. К окружности радиуса r из одной точки проведены секущая, проходящая через центр окружности, и касательная, равная половине секущей.
Найдите отрезок касательной. $\frac{4}{3}$R.
2. Окружности 3 и 5 касаются друг друга в точке A. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность большего радиуса в точке B, а меньшего – в точке C.
Найдите длину AB, если BC= $2\sqrt{5}$.
Ответ. $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}/4$.
3. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удаленной от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делит окружность пополам.
Определите длину секущей.
Ответ. 8 см.
4. Две хорды, длины которых 6 см и 8 см, пересекаются.
Найдите отрезки первой хорды, если вторая делится на отрезки 2 и 4 см.
Ответ. $(4 + 2\sqrt{2})$ см и $(4 - 2\sqrt{2})$ см.
5. К окружности радиуса r проведены четыре касательные, образующие ромб, большая диагональ которого равна 4r.
Определите площадь фигуры, ограниченной двумя касательными, проведенными из одной точки, и меньшей дугой окружности, заключенной между точками касания.
Ответ. $R^2(2\sqrt{3} - \pi)/6$.

Уровень В

1. Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник, образованный полуокружностью диаметра AB и двумя полуокружностями, построенных на радиусах OA и OB, как на диаметрах, если AB = 4R.
Ответ $\frac{2}{3}$R.
2. Через точки P и Q пересечения двух окружностей проведены их общие секущие AA_1 и BB_1.
Докажите, что AB и A_1B_1 параллельны.
3. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Пусть A и B – точки касания их общей касательной соответственно с первой и второй окружностями, A_1 – точка, диаметрально противоположная точке A. Отрезок A_1B пересекает окружность в точке M.
Найдите A_1M :MB.
Ответ. R : r.
4. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом.
Найдите площадь круга, вписанного в криволинейный треугольник, образованный этими окружностями и их внешней касательной.
Ответ. $\pi R^2r^2/(r^{0,5} + R^{0,5})^4$.
5. Две окружности касаются одновременно обеих сторон прямого угла.
Найдите отношение их радиусов, если одна из окружностей проходит через центр другой.

Ответ. (2- $\sqrt{2}$)/2, (2- $\sqrt{2}$).

6. Окружность проходит через вершины B, C, D трапеции ABCD и касается стороны AB в точке B.

Найдите длину диагонали BD, если длины оснований равны a и b.

Ответ $(ab)^{0,5}$.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ. МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

Дидактические цели и задачи. Развитие умений решать задачи алгебраическим методом, выбирать при решении задачи в качестве опорного элемента площадь (собственно реализовывать метод площадей при решении задач). Отработка навыка в использовании поэтапно-вычислительного метода в решении планиметрических задач.

Уровень Б

1. В треугольнике основание на 4 меньше высоты, а площадь этого треугольника равна 96.

Найдите основание и высоту треугольника.

Ответ. 12; 16.

2. Катеты прямоугольного треугольника относятся, как 5:6, а гипотенуза равна 122.

Найдите отрезки гипотенузы, отсекаемые высотой.

Ответ. 50, 72.

3. Около трапеции ABCD описана окружность радиуса 6. Центр этой окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. $32\sqrt{2}$.

4. В треугольнике ABC даны три стороны: AB = 26, BC = 30 и AC = 28.

Найдите часть площадь этого треугольника, заключенную между высотой и биссектрисой, проведенной из вершины B.

Ответ. 36.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором AB = BC, $\angle$ ABC = 120°. Расстояние от середины стороны AB до основания AC равно a.

Найдите площадь круга, вписанного в треугольник ABC.

Ответ. $12\pi a^2(7-4\sqrt{3})$.

6. Площадь равнобедренной трапеции равна 32. Котангенс угла между диагональю и основанием равен 2.

Найдите высоту трапеции.

Ответ. 4.

7. Диагональ равнобедренной трапеции делит тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42.

Найдите площадь трапеции.

Ответ. 96.

8. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 2.

Ответ. $\sqrt{3}$.

Уровень В

2. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 10, а его площадь 12.

Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Ответ. 1,2.

3. Сумма двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна 12, а радиус вписанной окружности равен 5.

Найдите площадь четырехугольника.

Ответ. 60.

4. Боковая сторона треугольника разделена в отношении 2:3:4, считая от вершины, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию.

В каком отношении разделилась площадь треугольника?

Ответ. 4:21:56.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BK на гипотенузу AC. Известно, что AK=5, AB = 13.

Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. 202, 8.

6. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5.

Найдите основания трапеции.

Ответ. 15, 5.

7. В равнобедренную трапецию площадью 32 вписана окружность радиуса 2.

Найдите боковую сторону трапеции.

Ответ.7.

8. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равно 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

Ответ. 75.

9. Найдите площадь треугольника, если две стороны его соответственно равны 27 и 29, а медиана третьей стороны 26.

Ответ. 270.

10. Найдите площадь треугольника ABC, если AC=3, BC=4, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\sqrt{11}$.

11. На стороне AD ромба ABCD взята точка M, причем MD = 0,3AD и BM = MC = 11.

Найдите площадь треугольника BCM.

Ответ. $20\sqrt{6}$.

12. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки длиной 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120°.

Найдите площадь треугольника.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

13. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведенными отрезками площадь этого треугольника разделилась на три части: 28, 60, 80.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 14, 30, 40.

§ 5. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ЗАДАЧАХ НА КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТИ И ТРЕУГОЛЬНИКА*

Дидактические цели и задачи. Формирование навыка использования подобия треугольников для нахождения элементов в комбинациях окружности и треугольника.

1. В равнобедренном треугольнике высота равна 20, а основание относится к боковой стороне, как 4:3.

Найдите радиус вписанного круга.

Ответ. 8.

2. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60.

Найдите основание треугольника.

Ответ. 50.

3. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56.

Найдите стороны треугольника.

Ответ. 16, 20, 20.

4. В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 100, а основание 60, вписан круг.

Найдите расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах.

Ответ. 12.

5. В треугольнике ABC известно, что AB = 15, BC= 12, AC = 18.

В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C?

Ответ. 2:1.

6. Точка на гипотенузе, равноудаленная от катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40.

Найдите катеты треугольника.

Ответ. 42, 56.

7. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а диаметр описанной окружности равен 25.

Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ. 6.

---

* В данных задачах предлагается использовать подобие для нахождения элементов планиметрических конфигураций

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ В РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α.

Найдите боковую сторону.

2. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α.

Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

3. Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α.

Найдите среднюю линию трапеции.

4. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α.

Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

5. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α.

Найдите длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

6. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании.

Найдите периметр трапеции.

7. Площадь прямоугольной трапеции равна S, острый угол равен α.

Найдите высоту трапеции, если ее меньшая диагональ равна большему основанию.

§1. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ И ПЛОЩАДИ

Дидактические цели и задачи: сформировать умение строить сечения, определять его вид, вычислять элементы и площадь.

ТЕМА 1. Некоторые правила построения сечения многогранника. Построение сечения, проходящего через три заданные точки, не лежащие на одной прямой

Уровень А

1. Через вершину A_1 и середины боковых ребер BB_1 CC_1 прямой треугольной призмы $ACB\ A_1B_1C_1$ проведено сечение.

Вычислите его периметр, если AA_1 =6см, AB=AC=4 см, BC=3см.

2. Через вершину A_1 и середины ребер AB и AC правильной треугольной призмы $ACB\ A_1B_1C_1$ проведено сечение.

Вычислите его периметр, если BC=16 см, AA_1 =6см.

3. Через вершину и середины двух противолежащих сторон правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его площадь, если сторона основания равна 12 см, а высота равна 5 см.

4. Через вершину и середины двух соседних сторон основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его периметр, если сторона основания пирамиды равна 8 см, а боковое ребро – 5 см.

5. Основанием пирамиды MABC является прямоугольный треугольник. Угол A равен 60°, угол C равен 90°, AB = 8 дм. Высота пирамиды MA равна 6 дм.

Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, C и середину высоты пирамиды.

Уровень Б

1. Проведите сечение куба $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$, содержащее точки A, C и середину ребра A_1D_1 .

Какой фигурой является сечение? Найдите его периметр, если ребро куба равно *a*.

2. Проведите сечение правильной треугольной призмы $ABC\ A_1B_1C_1$ плоскостью, содержащей середины ребер AA_1, BB_1 и BC.

Найдите периметр сечения, если все ребра призмы равны *a*.

3. Основание пирамиды MABCD – прямоугольный треугольник, стороны которого 9 см и 12 см. Боковое ребро MD перпендикулярно плоскости основания. Постройте сечение пирамиды плоскостью, содержащей точки A, C и середину высоты MD.

Вычислите площадь сечения, если угол между плоскостями сечения и основания равен 30°.

Уровень В

1. Проведите сечение правильной треугольной призмы $ABC\ A_1B_1C_1$ плоскостью, содержащей вершину A_1 середины ребер CC_1, BC.

Вычислите периметр сечения призмы, если высота ее равна 6 см, а сторона основания – 8 см.

2. Проведите сечение правильной четырехугольной призмы $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, содержащей вершину D_1 и середины ребер AB и BC.

Вычислите его периметр и площадь, если высота призмы равна 14 см, а сторона основания – 16 см.

3. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер C_1D_1, CC_1 и AB.

Какой фигурой является сечение? Найдите его периметр, если ребро куба равно a.

Задачи повышенной сложности

1. В пирамиде SABCD с вершиной S диагональ BD делится диагональю AC в отношении 3:2, считая от вершины D. На ребрах SD и SA взяты точки P и M соответственно, причем SP:PD=2:5, SM=MA.

а) Построить сечение пирамиды плоскостью MBP.

б) Найти, в каком отношении секущая плоскость делит ребро SC.

в) Найти площадь сечения, если площадь треугольника PQR равна 100 см^2 (R и Q – точки пересечения секущей плоскости с прямыми DA и DC соответственно).

2. Дана пирамида SABCD, основание которой – параллелограмм ABCD, M и P – середины ребер SA и SD.

а) Построить сечение пирамиды плоскостью AMP.

б) Определить, в каком отношении плоскость AMP делит ребро SC.

3. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины сторон AB и CB основания проведено сечение. Длина стороны основания равна a, а угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен α.

Найдите:

а) площадь сечения;

б) угол между плоскостью сечения и плоскостью боковой грани SCA.

ТЕМА 2. **Построение сечения, проходящего, через заданную прямую и не лежащую на ней точку**

Уровень А

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ через вершину D_1 и диагональ AC нижнего основания.

Найдите периметр этого сечения, если ребро куба равно a.

2. Через диагональ AC и вершину D_1 правильной четырехугольной призмы
ABCD $A_1B_1C_1D_1$ проведено сечение. Ребро основания призмы равно 20 см, угол при вершине сечения равен 60 °.

Вычислите площадь сечения.

3. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро- 6 см.

Вычислите площадь сечения призмы, проведенного через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания.

4. Через вершину и диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение.

Вычислите его площадь, если сторона основания 8 см, а боковое ребро пирамиды равно $5\sqrt{2}$ см.

5. Все ребра тетраэдра равны 24 см. Через боковое ребро и середину не пересекающей его стороны основания проведено сечение.

Вычислите периметр этого сечения.

6. Через вершину правильной шестиугольной пирамиды и диаметр окружности, описанной около ее основания, проведено сечение.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 4 см, а ее высота равна 5см.

Уровень Б

1. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Высота призмы равна 5 см. Через больший катет нижнего основания и середину гипотенузы верхнего основания проведена плоскость.

Вычислите площадь сечения призмы этой плоскостью

2. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Косинус угла между этой плоскостью и плоскостью основания равен $\frac{2}{5}$.

Вычислите площадь сечения призмы данной плоскостью, если сторона основания равна 6 см.

ТЕМА 3. **Построение сечения, проходящего через одну из заданных прямых, параллельно другой прямой**

Уровень А

Через вершину D_1 и середину ребра AD куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная прямой AC. Поведите сечение куба этой плоскостью.

Вычислите периметр сечения, если ребро куба равно 16 см.

Уровень Б

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной прямой A_1C_1 и проходящей через точку Аи середину ребра A_1B_1.

Какой фигурой является это сечение? Вычислите площадь сечения, если ребро куба равно 24 см.

2. Через основание высоты правильной четырехугольной пирамиды MABCD и середину ребра MC проведено сечение плоскостью, параллельной ребру AB.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания и высота пирамиды равна 4 см.

3. Все ребра пирамиды MABC равны 24 см. Через середину ребра MC и вершину B проведена плоскость параллельная прямой AC.

Вычислите периметр и площадь полученного сечения.

Уровень В

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины D_1 и B, параллельно прямой A_1C_1.

Какой фигурой является сечение? Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a.

2. Основании пирамиды MABCD – ромб. AC = 24 см, BDB = 21 СМ. Боковое ребро MA перпендикулярно плоскости основания, MA = 48 см. Через вершину A и середину ребра MC проведена плоскость, параллельная прямой BD.

Вычислите площадь полученного сечения.

Задачи повышенной сложности

1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD через середины сторон AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найдите площадь сечения, если сторона основания a, а боковое ребро $в$.

Ответ. $5aв\sqrt{2}/16$

2. На ребрах AA_1 и CC_1 параллелепипеда ABCD $A_1B_1C_1D_1$ расположены точки M и N так, что $AM:AA_1= m$, $CN:CC_1=n$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно диагонали BD основания. Определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1, считая от B.

Ответ. $m+n/2-m-n$.

3. Точка М лежит на ребре ВС = a куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1C_1D_1$ – нижнее основание).

а) Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точку М параллельно плоскости A_1BD.

б) Найдите площадь сечения, если BM = $\frac{a}{4}$. Указания. Разбейте полученное сечение на две равнобедренные трапеции и вычислите площадь каждой).

Ответ. $S_{сеч} = 11a^2\sqrt{3}/16$.

ТЕМА 4. Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно заданной плоскости

Уровень А

Через середину стороны АВ основания тетраэдра DABC проведено сечение плоскостью, параллельной боковой грани DBC.

Вычислите периметр и площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны 6 см.

Уровень Б

1. Основанием прямой призмы является ромб, сторона которого равна a, а угол - 60°. Высота призмы равна h. Проведите сечение призмы плоскостью, которая содержит середину одной из сторон основания, параллельна боковому ребру и плоскости меньшего диагонального сечения.

Найдите периметр и площадь сечения призмы.

2. Через середину высоты треугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, параллельной плоскости основания.

Вычислите площадь сечения, если стороны основания равны 5 дм, 12 дм, 13 дм.

3. Через середину ребра МС правильной пирамиды МАВС проведено сечение плоскостью, параллельно грани МАВ.

Вычислите его площадь, если сторона основания пирамиды равна 16 см, а боковое ребро - 17 см.

4. Через середину ребра AD правильной пирамиды MABCD проведено сечение плоскостью, параллельной грани DMC.

Вычислите площадь сечения, если апофема пирамиды равна $6\sqrt{2}$ дм и наклонена к плоскости основания под углом 45°.

Уровень В

1. Через середины ребер АВ и ВС правильной четырехугольной пирамиды MABCD проведена плоскость, параллельная ребру МВ.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания равна 8 см, а высота пирамиды – 7 см.

2. Все ребра тетраэдра равны а. Через точку пересечения медиан одной его грани проведена плоскость, параллельная другой грани.

Найдите площадь полученного сечения.

Задачи повышенной сложности

В кубе ABCD $A_1B_1C_1D_1$ через точку М, принадлежащую ребру BB_1 такую, что $MB : MB_1 = 1:3$, проведите сечение, параллельное плоскости A_1BC_1. Найдите периметр и площадь сечения, если ребро куба равно a.

Ответ. P=$9a\sqrt{2}/4$; S=$9a^2\sqrt{3}/32$.

ТЕМА 5. **Построение сечения, проходящего через заданную точку параллельно каждой из двух заданных прямых**

Уровень Б

Все ребра треугольной пирамиды MABC равны 12 см. Через основание ее высоты проведено сечение плоскостью, параллельной ребрам AB и MC.

Найдите площадь сечения.

Уровень В

1. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, плоскость которого параллельна двум скрещивающимся ее ребрам.

Найдите его площадь, если сторона основания *а*, боковое ребро – *в*.

2. Через центр основания правильной треугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, параллельной двум ее непересекающимся ребрам.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 3 см, а боковое ребро – 6 см.

Задачи повышенной сложности

1. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром *а*; O – точка пересечения диагоналей AC и BD грани ABCD.

а) Постройте сечение куба плоскостью α: $O\in\alpha$, $B_1D \parallel \alpha$, $A_1C_1 \parallel \alpha$.

б) Найдите площадь сечения.

Ответ. Сечение – равнобедренный треугольник,
S= $a^2\sqrt{6}/4$.

2. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром *а*; O – точка пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 грани AA_1B_1B.

Найдите длину стороны сечения, проходящей через точку O, и площадь этого сечения, если α: $O\in\alpha$, $B_1D \parallel \alpha$, $A_1C_1 \parallel \alpha$. Указания. Разбейте полученное сечение на равнобедренный треугольник и равнобедренную трапецию и вычислите площадь каждой фигуры.

Ответ. PF= $a\sqrt{5}/2$; $S_{сеч}= 7a^2\sqrt{6}/16$.

3. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC, равной 2 см. Высота призмы равна 4 см, точки K и M – середины ребер BB_1 и BC соответственно.

Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку B_1 параллельно прямым AK и AM, и найти его площадь.

Ответ. $\sqrt{11}$ см^2

4. В параллелепипеде ABCD $A_1B_1C_1D_1$ точки O и O_1 соответственно – точки пересечения диагоналей граней оснований соответственно, точка M принадлежит отрезку A, причем AM: MC = 3.

а) Постройте сечение параллелепипед а плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым A O_1 и DO.

б) Найдите, в каком отношении секущая плоскость делит отрезок A_1C.

Ответ. б) 1:1; в) 5:1, считая от вершины A_1.

ТЕМА 5. **Построение сечения, содержащего условия перпендикулярности**

Уровень Б

1. Через боковое ребро правильной треугольной призмы проведено сечение, плоскость которого перпендикулярна плоскости противолежащей боковой грани.

Найдите его площадь, если боковое ребро призмы равно *в*, сторона основания –*а*.

2. Через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.

Вычислите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 2 м, угол между плоскостями соседних боковых граней - 120 °.

Уровень В

1. Проведите сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A и C, перпендикулярной диагонали D_1B.

Найдите площадь сечения, если ребро куба равно *a*.

2. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей боковой грани.

Сравните площади основания пирамиды и полученного сечения.

3. Через основание высоты правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру.

Найдите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна ее высоте и равна *а*.

4. Через ребро основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру.

Вычислите площадь сечения, если ребро основания равно 4 см.

Задачи повышенной сложности

5. Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$. Через точку P, лежащую на диагонали AC_1 и такую, что $AP=2PC_1$, проведена плоскость, перпендикулярная этой диагонали.

а) Постройте сечение.

б) Найдите его площадь, если ребро куба равно *а*.

Ответ. $\sqrt{3}\,a^2/2$

6. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания равна 2, а боковое ребро SA = 6. Через среднюю линию KL боковой грани ABS ($KL \parallel AB$) проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру SC. Найдите: а) площадь сечения; б) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответ. $S_{сеч} = \sqrt{26}/12$; $\cos\varphi = \sqrt{702}/27$.

7. Построить сечение куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку M – середину ребра AA_1, перпендикулярно диагонали B_1D и найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно *а*.

Ответ. $3\sqrt{3}\,a^2/4$.

8. Основание пирамиды KABCD - квадрат со стороной, равной 4 см. Ребро KA перпендикулярно плоскости ABC; KB =5 см, AH – высота треугольника ABK.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину AK перпендикулярно AH.

б) Найдите площадь сечения.

в) Определите величину угла между секущей плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

Ответ. $S_{сеч} = 15/2$ см^2; $\varphi = \arccos 0{,}2$.

§2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Дидактические цели и задачи: научиться строить и вычислять расстояния, углы в многогранниках; научиться осуществлять обоснованные переходы от стереометрических углов к углам планиметрическим.

***ТЕМА 6*. Расстояния от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми**

УровеньА

1. В кубе ABCD $A_1B_1C_1D_1$ с ребром *a*вычислите расстояния от вершины B_1 до:

а) вершин противолежащего основания;

б) до каждого из ребер противолежащего основания;

в) до диагоналей противолежащего основания.

Найдите расстояние между прямыми B_1B и AC; между B_1B и AD.

2. Через точку пересечения диагоналей квадрата ABCD проведите перпендикуляр НО к его плоскости, равный $a\sqrt{2}$, AB = 2a. Найдите расстояния:

а) между прямыми МО и АВ;

б) между прямыми BD и МС;

в) от точки О до плоскости МВС;

в) от точки D до плоскости МВС.

Уровень Б

1. В прямоугольном параллелепипеде ABCD $A_1B_1C_1D_1$ AA_1:AB:AD = 1:3:4. На ребре AD задана точка Р – середина этого ребра, AA_1=a.

Найдите расстояние между прямыми B_1P И DD_1.

Ответ. $6a/\sqrt{13}$

2. Боковые грани правильной треугольной призмы - квадраты со стороной *a*.

Найдите расстояние между диагональю боковой грани и скрещивающимися с ней высотами основания.

Ответ. $a\sqrt{5}/5$, $a\sqrt{2}/2$.

3. Ребро куба ABCD $A_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние между прямыми B_1C и DC_1.

Ответ. $a\sqrt{3}/3$.

Задачи повышенной сложности

1. $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, у которого $AB=4$ дм, $B_1C_1=3$ дм, $AA_1=6$ дм. Точка K_1 принадлежит ребру C_1B_1, причем $C_1K_1:K_1B_1=1:2$.

Вычислите расстояние между прямой BB_1 и плоскостью DD_1K_1.

2. $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, у которого $AB=2$дм, $B_1C_1=6$ дм, $AA_1=4$ дм. Точка K_1 принадлежит ребру C_1B_1, причем $C_1K_1:K_1B_1=1:2$, точки F и F_1 – середины ребер DC и D_1C_1 соответственно. Точки L и L_1 – середины ребер AB и A_1B_1 соответственно, точка M_1 принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $1:2$, считая, от вершины A_1.

Вычислите расстояние между плоскостями KK_1F_1 и LL_1M_1.

3. В кубе $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ с ребром x вычислите расстояние между прямыми MN и FB_1, где точки M и N – соответственно середины ребер BC и DC, а точка F делит ребро AA_1 в отношении $1:3$, считая от вершины A.

4. В кубе $ABCDA_1A_1B_1C_1D_1$ с ребром y вычислите расстояние между прямыми MN и FD_1, где точки M и N – соответственно середины ребер AB и AD, а точка F делит ребро AA_1 в отношении $1:3$, считая от вершины A.

5. В правильной четырехугольной пирамиде* *ABCDM* с основанием *ABCD* и высотой *MO* вычислите расстояние от точки B_1 – середины ребра MB_1 до плоскости AB_1C (B_1– середина ребра *MB)*, если ребра основания равны *a*, а боковые ребра – *2a*.

6. В правильной треугольно пирамиде* *ABCD* с основанием *ABC* и высотой *DO* вычислите расстояние от точки A_1 – середины ребра *AD* до плоскости AC_1B (C_1 – середина CC_1), если ребра основания равны *b*, а боковые ребра – *2b*.

7. Найдите угол между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром *a*.

Ответ. $a\frac{\sqrt{10}}{10}$. *Указание*. Необходимо достроить тетраэдр до параллелепипеда.

ТЕМА 7. Углы между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями

Уровень А

Дан куб ABCD $A_1B_1C_1D_1$.

Найдите угол между:

1) прямыми:

а) DC_1 и C_1D; б) BD и CC_1; в) BD и A_1C_1; г) AD и B_1C; д) PE и AC;

е) PE и D_1C_1; ж) A_1C и BD. Точки P и E – середины A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

2) прямой DC_1 и плоскостями граней куба. Найдите косинус угла между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

3) плоскостями:

а) AB_1C_1 и ABC; б) BB_1D_1 и AA_1C.

Уровень Б

1. ABCD $A_1B_1C_1D_1$ – куб. Найдите угол между:

а) прямой DB_1 и плоскостями граней куба;

б) прямой A_1D и плоскостью BDC_1.

Ответ. arctg $\sqrt{2}$ /2; arcsin $\sqrt{6}$ /3.

2. ABCD $A_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка E – середина ребра A_1D_1.

Найдите угол между прямой BE и плоскостью BDD_1.

Ответ. arctg $\sqrt{17}$ /17.

3. В плоскости α расположен правильный треугольник ABC со стороной *a*. На перпендикуляре к плоскости α в точке A расположен отрезок AD, равный *a*.

Найдите угол между прямыми AB и CD.

Ответ. arccos $\sqrt{2}$ /4.

4. В правильном тетраэдре найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через апофемы боковых граней тетраэдра.

Ответ. arctg $\sqrt{2}$ /4.

Задачи повышенной сложности

1. В основании пирамиды *MABC* лежит прямоугольный треугольник *ABC*. Ребро *MA* пирамиды перпендикулярно плоскости *ABC*, и $MA=AC=BC$. На ребре *MB* взяты точки P_1, P_2, P_3, такие, что $BP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3M$.

Найдите углы между следующими прямыми: а) CP_1 и AP_3; б) CP_3 и AP_1.

2. На ребрах *AD* и B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:2$ взяты соответственно точки *P* и *Q* – середины этих ребер.

Найдите углы, которые образует с плоскостью A_1CD следующие прямые: а) *PQ*; б) PB_1.

3. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат *ABCD*. Ребро основания *AB* параллелепипеда относится к его высоте, AA_1 как *2:3*, точка *К* – середина ребра CC_1.

Найдите углы, которые образует плоскость AB_1K со следующими плоскостями: а) BCC_1; б) ABB_1.

4. В основании пирамиды *MABC* лежит прямоугольный треугольник *ABC*. Ребро *MA* пирамиды перпендикулярно плоскости *ABC*, и $MA=AC=BC$. На ребре *MB* взяты точки P_1, P_2, P_3, такие, что $BP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3M$.

Найдите углы между следующими прямыми: а) CP_1 и AP_3; б) CP_3 и AP_1.

5. На ребрах *AD* и B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AD:AA_1=1:2:2$ взяты соответственно точки *P* и *Q* – середины этих ребер.

Найдите углы, которые образует с плоскостью A_1CD следующие прямые: а) *PQ*; б) PB_1.

6. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат *ABCD*. Ребро основания *AB* параллелепипеда относится к его высоте, AA_1 как *2:3*, точка *К* – середина ребра CC_1.

Найдите углы, которые образует плоскость AB_1K со следующими плоскостями: а) BCC_1; б) ABB_1.

§3. КОМБИНАЦИИ ТЕЛ

Дидактические цели и задачи: научить строить изображения комбинаций тел и их отдельные виды – выносные чертежи; научить устанавливать взаимосвязь между элементами заданной комбинации; научить сознательно выбирать пути рассуждения и способы решения задач, определять объем и полноту письменного решения.

ТЕМА 8. Цилиндр и многогранники

Уровень А

1. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра. Высота призмы 20 см, сторона основания 16 см.

Вычислите объем цилиндра.

2. В цилиндр, высота которого 12 см, вписана правильная четырехугольная призма. Площадь ее диагонального сечения равна 120 см^2.

Вычислите объем цилиндра.

3. Правильная треугольная призма вписана в цилиндр. Высота цилиндра 10 см, радиус его основания $4\sqrt{3}$ см.

Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

Уровень Б

1. Около цилиндра описана правильная четырехугольная призма. Ее диагональ равна 17 см, а диагональ боковой грани – 15 см.

Вычислите объем цилиндра.

2. Призма, основание которой – прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 6 см, описана около цилиндра. Диагональ большей боковой грани призмы наклонена к основанию под углом 45°.

Вычислите:

а) диаметр основания цилиндра;

б) площадь боковой поверхности цилиндра.

3. Параллелепипед вписан в цилиндр.

Вычислите отношение площадей боковой поверхности цилиндра и диагонального сечения параллелепипеда.

4. В цилиндр вписана призма, основанием которой является равнобедренный треугольник. Его основание 6 см, а боковая сторона 9 см. Площадь боковой поверхности призмы 240 см^2.

Вычислите:

а) объем цилиндра;

б) расстояние между образующими цилиндра, лежащими в равных боковых гранях призмы.

Уровень В

1. В цилиндр вписана треугольная призма. Площадь ее боковых граней равна 54 см^2, 56 см^2, 72 см^2. Ось цилиндра расположена в плоскости одной из боковых граней.

Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.

2. Около цилиндра, осевое сечение которого - квадрат со стороной 8 см, описана призма. Ее основанием является прямоугольная трапеция. Площадь боковой поверхности призмы 288 см^2.

Вычислите:

а) длину большей стороны основания призмы;

б) объем призмы.

3. Около цилиндра, высота которого 15 см, а радиус основания 4 см, описана правильная четырехугольная призма.

Вычислите площадь полной поверхности призмы.

Задачи повышенной сложности

4. Ребра AB и CD правильного тетраэдра ABCD являются диаметрами оснований цилиндра.

Найдите:

а) отношение объема цилиндра к объему тетраэдра;

б) угол между образующей цилиндра и прямой AC;

в) угол между плоскостью основания цилиндра и плоскостью BCD.

Ответ. 3π; $\pi/4$; $\arccos\sqrt{3}/3$.

5(ЕГЭ-2004, вариант 001). На окружности основания цилиндра отмечены точки A и B такие, что дуга AB равна 60°. На окружности другого основания отмечены точки C и D рак, что CD – диаметр, перпендикулярный прямой AB.

Найдите объем пирамиды ABCD, если объем цилиндра равен 32π, а плоскость ACD образует с плоскостью основания угол 45°.

Ответ. $\frac{32}{3}$.

ТЕМА 9. **Конус и многогранники**

Уровень А

1. Правильна четырехугольная пирамида описана около конуса. Высота пирамиды 20 см. Образующая конуса 25 см.

Вычислите:

а) объем конуса;

б) площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Правильная треугольная пирамида вписана в конус. Сторона ее основания $12\sqrt{3}$ см, а боковое ребро – 15 см.

Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

3. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Сторона ее основания равна $6\sqrt{3}$ см. Высота пирамиды 10 см.

Вычислите объем конуса.

4. Правильная четырехугольная пирамида вписана в конус. Сторона основания пирамиды равна $5\sqrt{2}$ дм, а ее высота – 8 дм.

Вычислите объем конуса.

Уровень Б

1. Пирамида, основание которой – прямоугольный треугольник с острым углом 30°,вписана в конус. Меньшая сторона основания пирамиды равна 12 см. Высота ее 16 см.

Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

2. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Сторона основания равна 6 см, а боковое ребро - $4\sqrt{3}$ см.

Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

3. Треугольная пирамида, площадь основания которой 192 см^2,а периметр – 48 см, описана около конуса. Высота пирамиды – 15 см.

Вычислите:

а) объем конуса;

б) площадь боковой поверхности конуса.

4. Около конуса описана пирамида, высота которой 12 дм. Основанием пирамиды является ромб со стороной 4 дм. Угол между плоскостями основания и боковой грани пирамиды равен 60°.

Вычислите:

а) объем конуса;

б) площадь полной поверхности конуса.

Уровень В

1. Пирамида, основанием которой является прямоугольная трапеция с большей боковой стороной $12\sqrt{2}$ см и острым углом 45°, описана около конуса. Высота пирамиды 8 см.

Вычислите:

а)площадь полной поверхности конуса;

б) расстояние от центра основания конуса до плоскости боковой грани пирамиды.

2. Около конуса, высота которого равна 3 дм, описана пирамида. Ее основание – равнобокая трапеция с острым углом 60°. Периметр трапеции 48 см.

Вычислите:

а) площадь полной поверхности конуса;

б) угол при вершине осевого сечения конуса.

Задачи повышенной сложности

1 (ЕГЭ-2003, вариант 626). Внутри правильной пирамиды CABD с вершиной в точке C расположен конус, вершина которого является центром основания ABD. Основание конуса вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости ABD и делящей боковое ребро AC в отношении 2:1, считая от вершины C.

Определите отношение объема пирамиды к объему этого конуса. *Ответ*. $81\sqrt{3}$ /4π.

2(ЕГЭ-2003, вариант 627-629). В четырехугольной пирамиде FABCD все двугранные углы при основании равны между собой, а ее основанием является ромб ABCD с острым углом 60°. Внутри этой пирамиды расположен конус так, что его вершина является точкой пересечения диагоналей ромба, а окружность основания конуса вписана в сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости ABC и делящей боковое ребро FA в отношении 2:1, считая от вершины F.

Определите отношение объема этой пирамиды к объему конуса.

ТЕМА 10. Сфера и многогранники

Уровень А

1. Правильная четырехугольная призма описана около шара радиуса 20 см.

Вычислите площадь полной поверхности призмы.

2. Прямоугольный параллелепипед, стороны основания которого 6 см и 8 см, вписан в шар. Высота параллелепипеда 24 см.

Вычислите длину диаметра шара.

3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Его радиус равен 12 см. Угол между плоскостями боковой грани и основания пирамиды равен 60°.

Вычислите площадь основания пирамиды.

4. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Его радиус равен 18 см. Угол между плоскостями боковой грани и основания пирамиды - 60°.

Вычислите высоту пирамиды.

5. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Боковое ребро пирамиды равно 24 см, оно наклонено к плоскости основания под углом 30°.

Вычислите радиус шара.

Уровень Б

1. Правильная четырехугольная призма, объем которой 64 дм^3, описана около шара.

Вычислите отношение площади полной поверхности призмы и объема шара.

2. Около шара описана правильная треугольная призма. Высота ее равна $12\sqrt{3}$ дм.

Вычислите:

а) площадь поверхности шара;

б) объем призмы.

3. Около правильной треугольной призмы описан шар, радиус которого равен 2 дм. Сторона основания призмы – 3 дм.

Вычислите объем призмы.

4. Около правильной четырехугольной призмы описан шар.

Вычислите площадь его поверхности, если диагонали основания и боковой грани призмы равны соответственно
16 см и 14 см.

5. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой равно 12 дм, а высота – 8 дм.

Найдите объем шара.

6. Цент шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, делит ее высоту на части, равные $4\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{3}$ см.

Вычислите объем пирамиды.

7. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой 24 дм и стороной основания 14 дм вписан шар.

Вычислите объем шара.

8. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой 24 дм и стороной основания 14 дм вписан шар.

Вычислите объем шара.

Уровень В

1. Правильная треугольная призма вписана в шар. Его радиус равен $10\sqrt{3}$ см. Косинус угла между плоскостью боковой грани и радиусом, проведенным в вершину призмы, равен 0, 4.

Вычислите объем призмы.

2. В прямую призму, основанием которой является ромб с диагоналями 12 дм и 16 дм, вписан шар.

Вычислите площадь полной поверхности призмы.

3. В шар, радиус которого равен 14 см, вписана правильная треугольная призма; диагональ ее боковой грани равна 26 см.

Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

4. Около шара описана правильная треугольная призма. Ее объем равен 576 см^3.

Вычислите объем шара.

5. Прямая призма, основание которой – равнобокая трапеция с боковой стороной 20 см, описана около шара. Разность основания 24 см.

Вычислите:

а) объем призмы;

б) объем шара.

6. Основание пирамиды – правильный треугольник, сторона которого равна 15 дм. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Оно равно 15 см.

Вычислите длину радиуса шара, описанного около пирамиды.

Задачи повышенной сложности

1 (ЕГЭ-2003, вариант 620-625). В правильной треугольной пирамиде, со стороной основания равной 18 и двугранным углом при основании, равным 60°, расположены два шара. Первый шар касается всех граней пирамиды, а второй шар касается первого шара и всех боковых граней пирамиды.

Найдите радиус второго шара.

Ответ. 1.

2 (ЕГЭ-2003, вариант 630-634). В правильной треугольной призме, со стороной основания равной $4\sqrt{3}$ расположены два шара. Первый шар вписан в призму, а второй шар касается одного основания призмы, двух ее боковых граней и первого шара.

Найдите радиус второго шара.

Ответ. $3 - \sqrt{5}$.

3.Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит ее высоту в отношении 5 : 3.

Найдите величину двугранных углов при основании пирамиды и при боковом ребре пирамиды.

Ответ. arcsin$4\sqrt{34}$/25.

4. Центр шара, описного около правильной четырехугольной пирамиды. Делит ее высоту в отношении 5 : 3 , считая от вершины пирамиды.

Найдите величину угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

Ответ. arctg2.

5. Точка пресечения диагоналей основания правильной четырехугольной пирамиды делит отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром описанной около пирамиды сферы, в отношении 5 : 3.

Найдите величину угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

Ответ. $\mathrm{arctg}\sqrt{55}/11$.

6. В тетраэдр вписан шар радиуса r.

Найдите расстояние от центра шара до вершин и до ребер этого тетраэдра, если все его ребра равны.

Ответ. 3r, $r\sqrt{3}$.

7.В четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса r.

Найдите расстояние от центра шара до каждой из вершин и до каждого из ребер этой пирамиды, если все ребра пирамиды равны.

8. В шар радиуса r вписана правильная четырехугольная пирамида с плоским углом 90° при вершине.

Найдите высоту пирамиды.

Ответ. $\frac{2}{3}$R.

9.В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом 60° при ребре основания.

Найдите сторону основания пирамиды.

Ответ. $\frac{12}{7}$.

10. Центр шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, совпадает с центром вписанного в нее шара.

Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

11. Центр описанного около правильной шестиугольной пирамиды шара является серединой отрезка, соединяющего центр вписанного в пирамиду шара с основанием высоты пирамиды.

Найдите двугранный угол при ребре основания пирамиды.

12. Центр вписано и описанной около правильной четырехугольной пирамиды сфер симметричны относительно плоскости основания пирамиды.

Найдите отношение радиуса описанной сферы к радиусу вписанной.

Ответ. $1 + \sqrt{6}$.

13. Основанием треугольной пирамиды с равными боковыми ребрами является прямоугольный треугольник с гипотенузой 10. Высота пирамиды равна 12.

Найдите радиус описанного шара.

Ответ. $\frac{169}{24}$.

14. Основание пирамиды – ромб с углом 60° и стороной 6. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Высота пирамиды равна 9. Сфера проходит через четыре вершины пирамиды.

Найдите расстояние от пятой вершины до сферы (рассмотрите все случаи).

Ответ. $3(\sqrt{5}-1)$; $2(4-\sqrt{7})$.

15. Основание ABCD куба ABCDABCD является основанием правильной четырехугольной пирамиды MABCD. Сфера проходит через все девять указанных точек. Ребро куба равно а.

Какие значения может принимать высота пирамиды?

Ответ. $a(\sqrt{3}+1)/2$; $a(\sqrt{3}-1)/2$.

16. В треугольную пирамиду, все ребра которой раны 2 см, помещены четыре равных шара, каждый из которых касается трех остальных и вписан в один из трехгранных углов пирамиды.

Найдите радиус этих шаров.

Ответ. $1/(1+\sqrt{6})$.

17. Высота правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны *в*, является радиусом некоторой сферы.

Найдите длину линии пересечения поверхностей сферы и пирамиды (рассмотрите два случая).

Ответ. 0; $\pi в\sqrt{2}/3$.

18. Высота правильной шестиугольной пирамиды, все боковые ребра которой равны в и плоский угол при вершине равен 30, является диаметром некоторой сферы.

Найдите длину линии пересечения поверхности сферы и пирамиды.

Ответ. $\pi в\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$.

19. В пирамиду вписана сфера радиуса 7, полная поверхность пирамиды равна 33. Найдите произведение площади основания пирамиды на ее высоту.

Ответ. 77.

ТЕМА 11. Конус, цилиндр и сфера

Уровень А

1. В шар радиуса 4 см вписан конус с углом при вершине осевого сечения 60°.

Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

2. Шар вписан в конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник. Диаметр основания конуса равен $8\sqrt{3}$ см.

Вычислите диаметр шара.

3. Образующая конуса равна $12\sqrt{2}$ см и наклонена к плоскости основания под углом 45°.

Вычислите радиус шара, описанного около этого конуса.

4. Осевое сечение конуса – правильный треугольник. Высота конуса 18 см.

Вычислите площадь поверхности шара, вписанного в этот конус.

5. В цилиндр, образующая которого равна 16 см, вписан шар.

На сколько больше площадь полной поверхности цилиндра чем площадь поверхности шара?

6. Шар радиуса 10 см вписан в цилиндр.

Вычислите:

а) периметр осевого сечения цилиндра;

б) объем цилиндра.

Уровень Б

1. В шар, радиус которого 25 см, вписан конус. Высота конуса 32 см.

Вычислите площадь боковой поверхности конуса.

2. Около конуса описан шар. Отношение высоты конуса к радиусу шара равно 3:2.

Найдите отношение объемов шара и конуса.

3. Около конуса, высота и радиус основания которого равны соответственно 6 дм и $6\sqrt{3}$ дм, описан шар.

Вычислите объем шара.
4. В конус, образующая которого равна 10 см, а радиус основания – 6 см, вписан шар.
Вычислите объем этого шара.
5. Высота конуса в 3 раза больше радиуса вписанного в него шара. Образующая конуса равна 12 см.
Вычислите площадь боковой поверхности конуса.
6. В шар вписан цилиндр, радиус основания которого равен 4 см, а высота – 15 см.
Вычислите площадь поверхности шара.
7. Цилиндр вписан в шар. Расстояния от центра шара до образующей и до центра основания цилиндра равны соответственно 9 см и 12 см.
Вычислите радиус шара.
8. Цилиндр описан около шара.
Найдите отношение площадей поверхности шара и боковой поверхности цилиндра.
9. Цилиндр вписан в шар, радиус которого 10 см. Образующая цилиндра и диаметр его основания пропорциональны числам 4 и 3.
Вычислите площадь полной поверхности цилиндра.
10. В шар вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания под углом α. Радиус шара равен R.
Найдите:
а) высоту цилиндра;
б) площадь основания цилиндра.
11. Площадь поверхности шара больше суммы площадей оснований описанного около него цилиндра на 50π см^2.
Вычислите:
а)объем шара;
б) объем цилиндра.

Уровень В

1. Площадь полной поверхности конуса в два раза больше площади поверхности вписанного в него шара.
Вычислите косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания.
2. Шар вписан в усеченный конус, радиусы которого 25 см и 9 см.
Вычислите объем усеченного конуса.
3. Вычислите площадь боковой поверхности усеченного конуса, описанного около шара, если образующая конуса равна 26 см, а радиус шара – 12 см.
4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 дм и 12 дм, высота – 21 дм.
Вычислите радиус описанного шара.
5. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара и площадь основания конуса пропорциональны числам 4 и 3.
Вычислите градусную меру угла при вершине осевого сечения конуса.
6. Цилиндр вписан в шар радиуса R. Объем части шара, заключенной между основаниями цилиндра, в два раза больше объема цилиндра.
Найдите расстояние между центрами шара и основания цилиндра.
7. Найдите отношение объема шара, описанного около цилиндра, и объем шара, вписанного в этот цилиндр.

Произвольные комбинации сферы и многогранников. Комбинации сферы и правильных многогранников. Задачи повышенной сложности

1. В конус помещено два шара, один из которых вписан в конус, а другой касается первого шара и конической поверхности, имея с ней общую окружность.

Найдите отношение радиусов первой и второй сферы, если образующая конуса в три раза больше радиуса его основания.
2. Высота конуса является диаметром шара радиуса 2.

Найдите длину линии пересечения конической поверхности и сферической поверхности, если образующая конуса равна 5.
3. В цилиндр помещены четыре попарно касающиеся друг друга сферы радиуса 1 так, что каждая сфера касается цилиндрической поверхности. Две сферы касаются нижнего, а две – верхнего основания цилиндра.

Найдите радиус основания и высоту цилиндра.
4. В правильный тетраэдр вписан шар. В шар вписан правильный тетраэдр.

Найдите отношение объемов тетраэдров.

Ответ. 27:1. *Указание*. Введите вспомогательную переменную: ребро одного из тетраэдров – опорный элемент, затем, выразите последовательно через него радиус шара, ребро второго тетраэдра.
5. На сфере даны четыре равные окружности, каждая из которых касается остальных.

Найдите их радиус, если радиус сферы *R*.

Ответ. $R\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
6. Поверхность шара равна Q. Вычислите поверхность правильного октаэдра, вписанного в этот шар.

Ответ. $\mathrm{Q}\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$.
7. Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба. Найдите радиус сферы, если ребро куба равно *a*.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{41}}{8}a$.
8. Внутри правильного тетраэдра с ребром *a* расположены четыре равных шара так, что каждый касается трех других и граней тетраэдра Определите радиус этих шаров.

Ответ. $\dfrac{a}{10}(\sqrt{6}-1)$.

ТЕМА 12. Каркасные многогранники

1. Сфера касается всех ребер правильной шестиугольной пирамиды с ребром основания *a* и высотой *h*.

Найдите радиус сферы.
2. Сфера касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 10 и ребром основания 8.

Найдите радиус этой сферы.
3. Сфера касается всех ребер правильного тетраэдра с ребром а.

Найдите:

а) радиус сферы;

б) расстояние от центра сферы до вершины, грани и ребра тетраэдра.
4. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер основания правильного тетраэдра и проходящей через его вершину, если высота тетраэдра равна *h*.
5. Шар касается всех ребер правильной треугольной пирамиды.

Найдите отношение радиуса шара к стороне основания пирамиды, если плоский угол при вершине пирамиды равен *90*°.

6. Все ребра треугольной призмы касаются шара радиуса R.

Найдите объем призмы.

Задача повышенной сложности

1. Шар касается всех ребер правильного тетраэдра, ребро которого равно a.

Найдите объем образовавшегося тела (объединение объемов шара и тетраэдра).

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3(1+\pi(1-\frac{4\sqrt{3}}{9}))$.

§4. ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ. ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Дидактические цели и задачи. Формирование целостного представления о методах решения стереометрических задач на основе обобщения и систематизации, установления внутри- и межпредметных связей посредством развития общеучебных умений и навыков.

ТЕМА 13. **Вычисление объема тетраэдра***

Задача о вычислении объема тетраэдра с попарно перпендикулярными боковыми ребрами.
Задача о вычислении объема тетраэдра по площадям двух его граней, их общего ребра и двугранного угла, образованного этими гранями.
Задача о вычислении объема тетраэдра путем достраивания его до параллелепипеда.
Теорема об отношении объемов тетраэдров, имеющих по равному трехгранному углу.

ТЕМА 14. **Задачи на отыскание наибольшего и наименьшего значения**

Уровень Б

1. Найдите высоту и радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R..
2. Найдите наибольший возможный объем цилиндра, вписанного в конус, высота которого равна *27* и радиус основания равен *9*.
3. Периметр равнобедренного треугольника равен P.

Каковы должны быть длины его сторон, чтобы объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

4. Основание пирамиды – правильный треугольник, одно из боковых ребер совпадает с высотой пирамиды, длины двух других боковых ребер равны *3*.

При какой высоте пирамиды ее объем является наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ. $\sqrt{3}$; 1,5

5. Прямоугольный треугольник, сумма длин катетов которого равна *3*, вращается вокруг одного из них.

Каким должны быть длины катетов, чтобы объем полученного при вращении конуса был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ. 2; 1; $4\pi/3$.

6. Найдите наибольший объем конуса с образующей a.

Найдите радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в конус, радиус основания которого – *3*.

7. В сферу радиуса R вписан цилиндр.

Найдите наибольшее значение боковой поверхности цилиндра и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

Вокруг сферы радиуса rописан прямой круговой конус.

Найдите наименьшее значение объема конуса и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

Уровень В

1. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, объем которой равен *4*, а сумма длин всех ребер наименьшая.

Ответ. $8 + 4\sqrt{3}$.

---

* К указанной теме можно отнести также задачи, требующие нахождения объема тетраэдра в том случае, если величины заданы параметрически

2. Середина бокового ребра правильной треугольной пирамиды находится на расстоянии *2* от высоты основания, не пересекающей это боковое ребро.

При какой длине стороны основания пирамиды она будет иметь наибольшую площадь боковой поверхности? Найдите это наибольшее значение площади.

Ответ. $4\sqrt{3}$; $12\sqrt{6}$.

3. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида.

Каков наименьший возможный объем этой пирамиды?

4. Конус описан около куба таким образом: четыре вершины куба лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины – на его боковой поверхности.

Какой наименьший объем может иметь такой конус, если ребро куба равно a?

5. Правильная треугольная призма вписана в шар радиуса *4* так, что одно из боковых ребер лежит на диаметре шара, а все вершины противоположной боковой грани принадлежат поверхности шара.

При какой высоте призмы сумма длин всех ее ребер является наибольшей?

Ответ. $2\sqrt{2}$; $24\sqrt{2}$.

6. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большему кругу шара с радиусом *26*, а вершины другого основания принадлежат поверхности этого шара.

Определите высоту призмы, при которой сумма длин всех ее ребер является наибольшей.

Ответ. $2\sqrt{13}$.

7. Найдите высоту и радиус основания конуса наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R.

ТЕМА 15. **Задачи на сравнение объемов геометрических тел**

Уровень А

1. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD. Точка F- середина ребра BC.

Найдите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость DSF.

Ответ. 3:1.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD. Точка F делит ребро BC в отношении 1:2, считая от точки B. Точка E делит ребро AB пополам.

Найдите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость EFS.

Ответ. 1:11.

3. В каком отношении делит объем правильной четырехугольной пирамиды плоскость, проходящая через вершину и центр основания?

Ответ. 1:1.

4. В каком отношении делится объем правильной n-угольной пирамиды плоскость, проходящей через вершину пирамиды и пересекающей ее основание?

Ответ: пирамида делится на части так же, как площади оснований.

5. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, параллельная основанию и пересекающая боковые ребра пирамиды?

Уровень Б

1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD через середину бокового ребра SC – точку F – и диагональ основания BD проведено сечение.

Найдите отношение объемов фигур, на которые плоскость сечения делит пирамиду. *Ответ*. 3:1.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD. Точка F делит ребро SC в отношении 1:2, считая от точки S, точка E – середина ребра BC.

Найдите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость DEF.

Ответ. 5:1.

3. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две равновеликие части.

В каком отношении эта плоскость делит высоту пирамиды?

Ответ. $1/\sqrt[3]{2}$.

4. В каком отношении делит объем тетраэдра плоскость, проходящая через середину одного ребра и противолежащее ребро?

Ответ. 1:1.

5. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S. Точка F делит ребро BC в отношении 1:2, считая от точки B.

Найдите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость DSF.

Ответ. 1:2.

Уровень В

1. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD, точка F – середина бокового ребра SC. На продолжении стороны CD отложен отрезок DE, равный двум отрезкам CD.

Найдите отношение объемов фигур, на которые плоскость BEF делит пирамиду.

Ответ. 31:29.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD S – вершина. Точки E и F – середины ребер AB и BC.

Найдите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки E и F параллельно ребру SB.

Ответ. 9:23.

Задачи на сравнение объемов геометрических тел, в которых применяется теорема Менелая

1. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S, точка F делит ребро SC в отношении 1:2, считая от точки S, точка E делит ребро SB пополам.

Найдите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость DEF.

Ответ. 11:13.

2. В правильной треугольной пирамиде с вершиной S и основанием ABC на продолжении стороны BC отложена точка K, такая, что C является серединой BK. Через точки A, K и середину ребра SC проведена плоскость.

Найдите отношение объемов фигур, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Ответ. 1:5.

3. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD с вершиной S и основанием ABC. Точка F делит ребро SC в отношении 1:2, считая от точки S; точка E делит ребро SA в отношении 1:3, считая от точки S.

Найдите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость KEF.

Ответ. 5:43.

Задачина сравнение площадей поверхностей отсеченных многогранников

1. На ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P_1, P_2 и P_3, такие, что $BP_1=P_1P_2=P_2P_3=P_3A$. Постройте сечения куба плоскостями: а)C_1DP_1; б)C_1DP_2; в)C_1DP_3.

Найдите отношение площадей поверхностей многогранников, на которые рассекается куб в каждом случае.

4. На ребрах B_1C_1, AD *и* CDпрямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, K иL – середины этих ребер. Отношение ребер параллелепипеда $AB:AD:AA_1=1:2:1$.

Постройте сечения параллелепипеда плоскостями, проходящими через точку P параллельно прямой DD_1 и следующим прямым: а)AB_1; б)B_1K; в)B_1L.

Найдите отношения площадей поверхностей многогранников, на которые рассекается параллелепипед в каждом случае.

6. В основании пирамиды $MABC$ с высотой MO лежит прямоугольный треугольник ABC, и $MO=AC=BC$. Все боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. На ребре MC взята точка K - середина этого ребра. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку O – основание высоты перпендикулярно прямой AK.

Найдите отношение площадей фигур, на которые секущая плоскость разделяет следующие грани: а)ABC; б) MAB; в)MAC.

5.Литература

1. Литвиненко В. Н.
   Сборник задач по стереометрии с методами решений: Пособие для учащихся. - М.: Просвещение, 1998.-255 с.: ил.
2. Звавич Л. И.
   Геометрия. 8- 11 кл.: Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Дрофа, 2000. – 288 с.6 ил.
3. Звавич Л. И.
   Контрольные и проверочные работы по геометрии. 10 – 11 кл.: Метод. пособие / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, Е. В. Такуш. – М.: Дрофа, 2001. – 192 с.: ил.
4. Примерное тематическое планирование уроков повторения в 10 и 11 классах // Первое сентября. Математика. – 1999. - №16.- с. 6 – 8
5. Углубленное изучение математики 8 – 11 классы // Первое сентября. Математика. - 1996. – № 41.- с. 2 – 3
6. Углубленное изучение математики 8 – 11 классы // Первое сентября. Математика. - 1996. – № 44.- с. 2 – 3
7. Матизен В. Э.
   Равногранные и каркасные тетраэдры // Квант. – 1983. _ №7. – с.34 – 39
8. Сборник задач по геометрии для проведения устного экзамена в 9 и 11 кл. Пособие для учителя / Д. И. Аверянов, Л. И. Звавич, Б. П. Пигарев, А. Р. Рязановский. – М. Просвещение: Уч. лит., 1996. – 96 с.- ил.
9. Бовт Н.
   Повторяем – решая. Треугольники // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 16.
10. Бовт Н.
   Повторяем – решая. Четырехугольники // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 17.
11. Бовт Н.

Повторяем – решая. Окружность // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 18.
12. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Планиметрия. – М.: Вербум – М, 2000, - 112 с.
13. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. Пособие / В. К. Егерев, др.; п.ред. М. И. Сканави.- М.: «Столетие», 1997. – 560 с.: ил.
14. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Геометрия: Задачник к школьному курсу. – М.: Аст-Пресс: Магистр – S, 1998. – 256 с.
15. Шарыгин, Р. К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 400 с.: ил.
16. Зубелевич Г. Задачи на вычисление площадей треугольников и четырехугольников // Первое сентября. Математика. - 1995. – № 4, 10, 11, 14.
17. Селевко Г.К. Педагогические технологии на основе дидактического и методического усовершенствования УВП. М.: НИИ школьных технологий, 2005.
18. Программы авторских курсов для системы непрерывного образования: Сборник программ / Под общ. ред. Е.И.Шулевой. – Магнитогорск: МаГУ, 2005.
19. КИМ «ЕГЭ. Математика», 2002-2006 гг.